
Gráficas y juegos

Quinta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se entrega en equipos de dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

1. Demuestra que toda gráfica conexa posee un árbol generador.
2. Denotamos por $\text{cp}(G)$ al número de vértices de corte de una gráfica dada G . Prueba que:
 - (a) Si e es una arista cíclica de G entonces $\text{cp}(G) \leq \text{cp}(G - e)$. (*Sugerencia*. Prueba que todo vértice de corte de G es vértice de corte en $G - e$).
 - (b) Supón que G es conexa, prueba que si T es un árbol generador de G , entonces $\text{cp}(G) \leq \text{cp}(T)$.
 - (c) Deduce que toda gráfica posee al menos dos vértices que no son de corte.
 - (d) ¿Cuál es el número máximo de vértices de corte que puede tener una gráfica de orden n ?
3. Demuestra que si v es un vértice de corte en G entonces v no es de corte en $\overline{G}$ (el complemento de G).
4. Prueba que si G es conexa y de orden al menos tres, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) G no posee vértices de corte.
 - (b) Para cualquier par de vértices u y v , existe un ciclo de G que los contiene.
 - (c) Para cualquier vértice u y cualquier arista e , existe un ciclo de G que los contiene.

La primera implicación se vio en clase. La segunda implicación se hace muy parecido a la prueba de la primera implicación.

5. Prueba que la gráfica de bloques y de vértices de corte de una gráfica conexa es un árbol.
6. Sea G una gráfica conexa y $b(v)$ el número de bloques que contienen al vértice v . Prueba que el número de bloques de G es

$$1 + \sum_{v \in V} (b(v) - 1)$$

.

EXTRAS

1. Prueba que el número de hojas de un árbol no trivial T con $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es:

$$2 + \sum_{d(v_i) \geq 3} (d(v_i) - 2)$$

.

2. Dada G una gráfica, definimos la *gráfica de líneas* de G , $L(G)$, como la gráfica cuyos vértices son las aristas de G y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si las aristas correspondientes en G son adyacentes. ¿Es cierto que si e es una arista de corte en G entonces e es un vértice de corte en $L(G)$? (Justifica tu respuesta).
3. Considera T un árbol arbitrario con $k + 1$ vértices. Muestra que si G tiene grado mínimo al menos k entonces G posee una subgráfica isomorfa a T . (*Sugerencia.* Usa inducción sobre el número de vértices de T)