
Gráficas y juegos

Sexta tarea

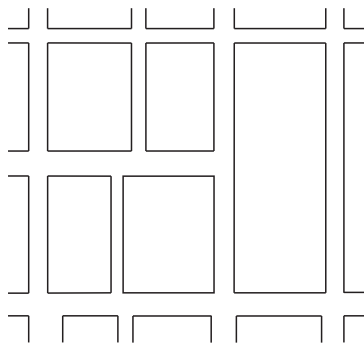
Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

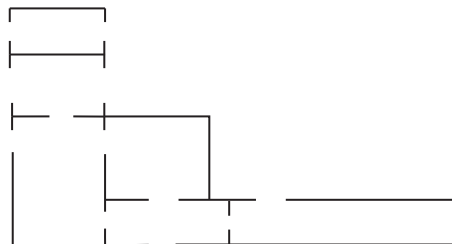
1. Encuentre una gráfica G , tal que $\kappa(G) = 3$, $\lambda(G) = 4$ y $\delta(G) = 5$.

En los siguientes problemas, las gráficas pueden tener aristas múltiples.

2. Un cartero es responsable de entregar el correo a las casas por ambos lados de la calle (ve el diagrama siguiente). Si el cartero no se cruza de ambos lados para entregar el correo a las casas, ¿será posible que haga un recorrido de tal modo que pase por cada lado de la calle una sola vez empezando y terminando en un mismo lugar de tal modo que recorra todas las calles?



3. La siguiente figura muestra el plano de una casa; ¿es posible que una persona pase por cada una de las puertas de la casa una sola vez? Modela este problema con una gráfica y, en caso de que sea posible



recorrer la casa de este modo, muestra cómo puede hacerse, en caso contrario explica por qué no.

4. Supón que hay un grupo de cuatro islas y que entre cualesquiera dos islas hay exactamente un bote que transporta a la gente de una isla a otra. ¿Es posible hacer un viaje (no necesariamente de ida y vuelta) de tal modo que se utilice cada bote exactamente una vez?
5. Prueba que para cualquier gráfica conexa con $2p$ vértices de grado impar existe una partición de $A(G)$ en p paseos eulerianos abiertos.
6. Sean G_1 y G_2 dos gráficas eulerianas sin vértices en común. Sean $v_1 \in V(G_1)$ y $v_2 \in V(G_2)$. Sea G la gráfica con conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$ y conjunto de aristas $A(G_1) \cup A(G_2) \cup \{\{v_1, v_2\}\}$. Prueba que G tiene un paseo euleriano abierto.

Extras

1. Muestra que $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$, para toda $n \in \mathbb{Z}^+$.
2. De un ejemplo de una gráfica euleriana tal que cualquier arista que se añada siga teniendo un paseo euleriano cerrado. (Dicha gráfica ¿puede ser simple?)
3. Sea G una gráfica, pruebe que G es euleriana si y sólo si es conexa y todos sus vértices tiene grado par. (Observación: G no necesariamente es simple, puede tener lazos y multiaristas.)