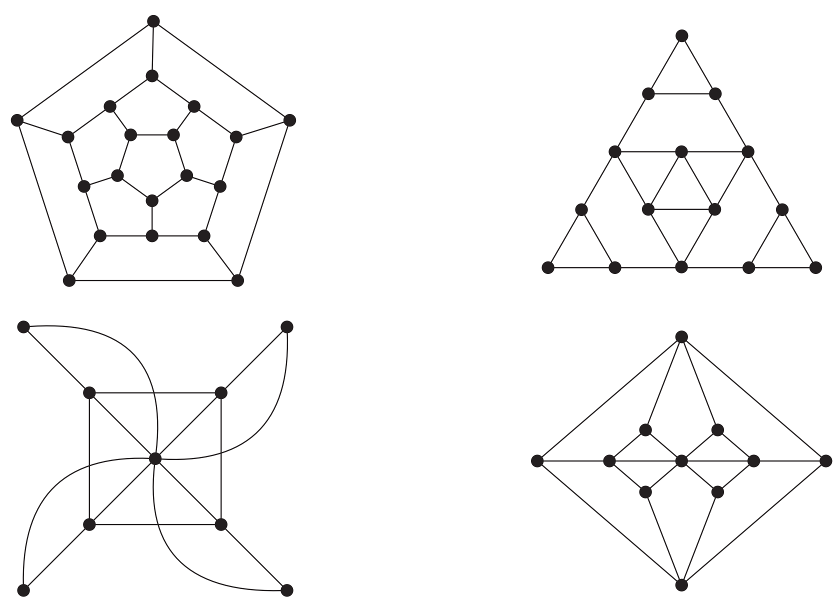
Gráficas y juegos

Sétima tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples. La tarea se entrega en equipos de dos personas.

1. Determine cuáles de las siguientes gráficas poseen un ciclo o una trayectoria hamiltoniana:



2. Prueba que dada una gráfica G de orden al menos tres, si existe un subconjunto S de los vértices de G tal que $G - S$ tiene más componentes que la cardinalidad de S entonces G no tiene ciclo hamiltoniano. *Sugerencia.* Prueba la contrapositiva.

(a) Prueba por inducción que si C es un ciclo y S cualquier subconjunto de los vértices de C entonces $C - S$ tiene a lo más $|S|$ componentes.

(b) Prueba que si H es una subgráfica generadora de G y S es un subconjunto de los vértices de G entonces

$$\omega(G - S) \leq \omega(H - S).$$

Sugerencia. Prueba que toda componente conexa en $H - S$ también lo es en $G - S$.

(c) Deduce que si G posee un ciclo hamiltoniano entonces para todo subconjunto S de los vértices de G,

$$\omega(G - S) \leq |S|.$$

3. Prueba que dada una gráfica G, si existe un subconjunto S de los vértices de G tal que $G-S$ tiene más componentes que $|S|+1$ entonces G no posee una trayectoria hamiltoniano. *Sugerencia.* Modifica la prueba anterior adecuadamente.

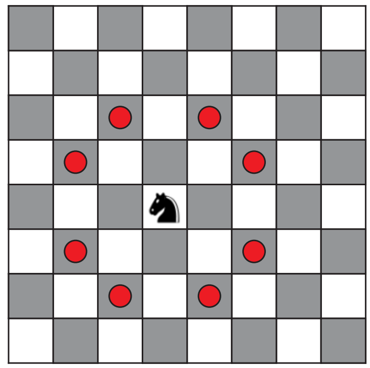
4. Encuentre una gráfica que no sea hamiltoniana tal que para todo $S \subset V(G)$, el número de componentes conexas de $G - S$ es a lo más la cardinalidad de S.

5. (a) Demuestra que si G es euleriana entonces su gráfica de líneas $L(G)$ es hamiltoniana.

   (b) Prueba o da un contraejemplo: Si G es hamiltoniana su gráfica de líneas $L(G)$ es hamiltoniana.

   (c) Prueba que el recíproco del enunciado anterior es falso.

6. Considere un tablero de ajedrez de 4 por 4. Muestra que un caballo de ajedrez puede recorrer todas las casillas del tablero sin repetir ninguna usando movimientos válidos. Recuerde que el caballo de ajedrez se mueve en "L"; observa la siguiente figura, las casillas marcadas en rojo son las casillas a las que el caballo en esa posición se puede mover:



Extras

A. ¿Es posible que un caballo de ajedrez recorra todas las casillas de un tablero de 5 por 5 con movimientos válidos?

B. Una gráfica G es *hipohamiltoniana* si G no es hamiltoniana y $\forall v \in V(G)$ se tiene que $G - v$ es hamiltoniana. Prueba que la gráfica de Petersen es hipohamiltoniana.

C. Prueba si G y H son hamiltonianas entonces $G \times H$ es hamiltoniana. ¿El recíproco será cierto?

D. Prueba que el n-cubo, Q_n posee un ciclo hamiltoniano para toda $n \geq 2$.