Gráficas y Juegos

Octava y última tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea se puede entregar en equipos de hasta dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

Considera W un conjunto no-vacío y $S_1, S_2, \ldots, S_n$ una familia finita y no-vacía de subconjuntos (no necesariamente ajenos) de W. Un *sistema de distintos representantes (SDR)* para la familia $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ es una n-ada $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ tal que $a_i \in S_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, y $a_i \neq a_j$ si y sólo si $i \neq j$.

1. (a) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

   $$S_1 = \{1, 4\},\ S_2 = \{2, 5\},\ S_3 = \{4\}, S_4 = \{3, 5\} \text{ y } S_5 = \{3, 5\}.$$

   ¿Posee la familia $(S_1, S_2, \ldots, S_5)$ un sistema de distintos representantes? ¿Por qué?

   (b) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

   $$S_1 = \{1\},\ S_2 = \{2, 3\},\ S_3 = \{1, 4, 5\}, S_4 = \{1, 2\} \text{ y } S_5 = \{1, 3\}.$$

   ¿Posee la familia $(S_1, S_2, \ldots, S_5)$ un sistema de distintos representantes? ¿Por qué?
   En general, dada una familia de conjuntos $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, si existen k de ellos cuya unión tiene menos de k elementos entonces la familia no posee un sistema de representantes distintos.
   Ésto es, si existe algún $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que:

   $$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \qquad |I|,$$

(c) Enuncia el recíproco de la afirmación anterior.

(d) Representa la situación del primer problema en forma de un gráfica. (*Sugerencia.* Recuerda que la *pertenencia* es una relación sobre la clase de los conjuntos).

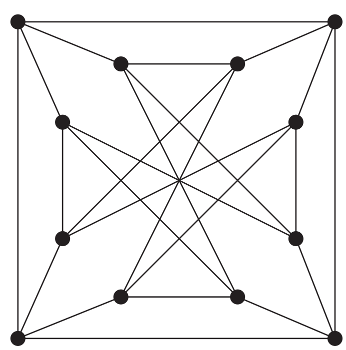
2. Con el Teorema de Hall, prueba que:

   Teorema 1. *La familia* $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ *de subconjuntos finitos no-vacíos de un conjunto* W *posee un sistema de representantes distintos si y sólo si*
   $$\left|\bigcup_{i\in I} S_i\right| \geq |I|,$$
   para todos los subconjuntos I *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Dados $G[X, Y]$ una gráfica bipartita y S_1 y S_2 subconjuntos de X, muestra que:
   $$|N(S_1)| + |N(S_2)| \geq |N(S_1 \cup S_2)| + |N(S_1 \cap S_2)|.$$

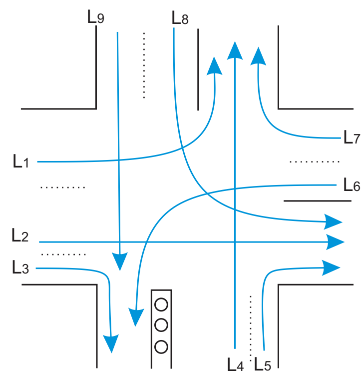
4. Considera una gráfica G con $\chi(G) = p$ y $x \in V(G)$. Prueba que $\chi(G - x)$ es p o $p - 1$.

5. Muestre que la gráfica de Chvátal que se ilustra a continuación es 4-cromática.



6. El siguiente diagrama representa un crucero; los carriles de tránsito están señalados con las líneas $L_1, L_2, \ldots, L_9$. Los autos situados en dos carriles distintos no pueden transitar de manera segura en una misma fase del

semáforo si dichos carriles se intersectan o si ocupan el mismo carril al avanzar. Determina el mínimo número de fases del semáfaro que se necesitan para que eventualmente todos los autos logren cruzar de manera segura. Dibuja una gráfica que modele este problema.



7. El Departamento de Matemáticas se cierta universidad desea programar los horarios de los cursos que se impartirán en el verano. Los cursos que los estudiantes han solicitado son: Teoría de Gráficas (TG), Álgebra Lineal (AL), Estadística (E), Cálculo (C), Geometría Diferencial (GD) y Álgebra Moderna (AM). Diez estudiantes han indicado los cursos que desean tomar;

   - Andrés: AL, E
   - Carlos: AM, GD, AL
   - Ernesto: C, AL, E
   - Diana: TG, AM, AL
   - Mónica: C, E, AL
   - José: AM, AL, GD
   - Fernanda: GD, AL, C
   - Roberto: GD, C
   - Patricio: AL, TG, E
   - Sandra: TG, E

   con esta información determina el mínimo número de periodos que se necesitan para ofrecer estos cursos, de manera que dos cursos situados en un mismo horario no tienen estudiantes en común.

8. Prueba, mediante el uso de la fórmula de Euler, que $K_{3,3}$ no es plana.

9. Prueba que el grado mínimo de una gráfica plana es menor o igual que cinco.

10. Prueba que si G es una gráfica bipartita plana conexa con al menos tres vértices entonces m es menor o igual que $2n - 4$.

Extras

A. Considera una gráfica bipartita $G[X, Y]$. Para algún $S \subseteq X$, llama E_1 al conjunto de las aristas en G incidentes con algún vértice en S y llama E_2 al conjunto de las aristas de G incidentes con algún vértice en $N(S)$. ¿Es cierto, en general, que $E_1 \subseteq E_2$? ¿Por qué?

B. Calcula el número total de apareamientos perfectos de K_{2n}

C. Prueba que si cualquier par de ciclos de longitud impar en una gráfica se intersectan entonces su número cromático es a lo más cinco.

D. Prueba que si G es una gráfica plana con al menos once vértices entonces su complemento no es plana.

E. Prueba que:

$$\chi(G) = \min\{|P| : P \text{ es una partición de } V(G) \text{ en conj. independientes } \}.$$

F. (a) En unos laboratorios químicos hay que almacenar un pedido compuesto por un total de siete sustancias químicas diferentes que distinguiremos con los números del 1 al 7. Así mismo, la naturaleza de estas sustancia es tal que para todo $2 \leq i \leq 5$ la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimento que la sustancia $i-1$ o la $i+2$. Determinar el mínimo número de compartimentosque se necesitan para almacenar de forma segura estas siete sustancias.

(b) Supongamos que además de las condiciones anteriores, los cuatro pares siguientes de las siete mismas sustancias requieren también compartimentos separados: 1 y 4, 2 y 5, 2 y 6, 3 y 6. ¿Cuál es el menor número de compartimentos de almacenamiento que se necesitan ahora?