
Teoría de las gráficas I

Primera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas.

1.
 - a) Considera una gráfica G tal que $V(G) = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ y dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $\text{mcd}(u, v) = 1$. Dibújala y determina $A(G)$.
 - b) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq 3$. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.
 - c) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i + j$ es múltiplo de cuatro. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.
 - d) Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \dots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i \cdot j$ es múltiplo de diez. Dibuja la gráfica G y determina $A(G)$.
2. Da un ejemplo de una gráfica G de tamaño positivo con la propiedad de que cualquier vértice incide en cualquier arista.
3. Muestra que hay once gráficas no isomorfas de cuatro vértices.
4. Prueba que la suma de un conjunto de números enteros impares es par si y sólo si el número de sumandos es par.
5. Dada G una gráfica de tamaño m , prueba que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

mediante inducción sobre el tamaño de la gráfica.

6. Si G es una gráfica de orden n y tamaño m , prueba que

$$m \leq \binom{n}{2}$$

y determina cuándo se da la igualdad.

7. Prueba que en cualquier grupo de amigos (en el que la relación de amistad sea reflexiva) siempre existen dos personas que tienen el mismo número de amigos dentro del grupo.
8. Describe un grupo de cinco personas, en el cual cualesquiera dos de sus miembros tienen exactamente un amigo en común. ¿Puedes encontrar un grupo de cuatro personas con la misma propiedad?
9. Si G es una gráfica bipartita con partes X y Y tales que $|X| = r$ y $|Y| = s$,
 - a) muestra que $m \leq rs$,
 - b) deduce que $m \leq \frac{n^2}{4}$ y
 - c) describe las gráficas bipartitas para las cuáles se la igualdad en (b).
10. El grado promedio de una gráfica G se define como:

$$d(G) := \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v),$$

muestra que $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.