Teoría de Gráficas

Tercera tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. Se entrega en equipos de exactamente dos personas.

1. Demuestra que si v es un vértice de corte en una gráfica conexa G entonces v no es de corte en G^c
2. Un *elemento* de una gráfica G es un vértice o una arista. Prueba que una gráfica G de orden al menos 3 es no-separable si y sólo si cualquier par de elementos de G están en un ciclo común.
3. Considera una gráfica G de orden $n \geq 3$ que satisfaga que para cualquier par de vértices no adyacentes u y v , $d_G(u) + d_G(v) \geq n$. Prueba que G es no-separable.
4. (a) Sea R una relación definida sobre el conjunto de aristas de una gráfica conexa G no trivial. Para $e, f \in E$, diremos que eRf si $e = f$ o e y f están en un ciclo común. Prueba que R es de equivalencia. ¿Cuáles son las clases de equivalencia inducidas por R ?
(b) Sean B_1 y B_2 bloques de una gráfica conexa G no trivial, pruebe que se cumplen las siguientes propiedades:
 - i. B_1 y B_2 son ajenos por aristas.
 - ii. B_1 y B_2 tienen a lo más un vértice común.
 - iii. Si B_1 y B_2 tienen un vértice común v entonces v es de corte en G .(c) Demuestra que la gráfica de bloques y de vértices de corte de una gráfica conexa G , es un árbol.
5. (a) Encuentra todos los árboles T tales que su complemento también es un árbol.
(b) Prueba que todo árbol no trivial es bipartito.

6. Considera T un árbol con V_1 el conjunto de hojas de T y V_3 el conjunto de vértices de grado mayor o igual que dos de T . Prueba que:

$$|V_1| = \sum_{v \in V_3} d(v) - 2|V_3| + 2.$$

7. Dado T cualquier árbol de orden $k + 1$. Prueba que si una gráfica G satisface que $\delta(G) \geq k$ entonces G tiene una subgráfica que es isomorfa a T (*Sugerencia*. Usa inducción).
8. Un árbol generador de una gráfica G es una subgráfica generadora de G tal que es un árbol. Demuestra que toda gráfica conexa posee un árbol generador (*Sugerencia*. Usa inducción).