Teoría de Gráficas

Cuarta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. Se entrega en equipos de exactamente dos personas.

1. (a) Considera una gráfica G de orden par $n \geq 6$ tal que todo vértice tiene grado tres o cuatro. Si G posee dos árboles generadores T_1 y T_2 tales que $\{A(T_1), A(T_2)\}$ es una partición de $A(G)$, ¿cuántos vértices de grado cuatro tiene G?

   (b) Muestra que existen un entero par $n \geq 6$ y una gráfica conexa G de orden n tal que

      i. Cada vértice de G tiene grado tres o cuatro.

      ii. G posee el número de vértices de grado cuatro determinados arriba y

      iii. G **no** posee dos árboles generadores T_1 y T_2 tales que $\{A(T_1),$ $A(T_2)\}$ es una partición de $A(G)$.

2. Prueba que si G es k-conexa entonces $G + K_1$ es $(k+1)$-conexa.

3. ¿Cuál es el menor tamaño posible de una gráfica k-conexa de orden n?

4. Considera un vértice v en una gráfica G, prueba que $\kappa(G - v)$ es igual a $\kappa(G)$ o a $\kappa(G) - 1$.

5. Considera una arista e en una gráfica G, prueba que $\kappa(G - e)$ es igual a $\kappa(G)$ o a $\kappa(G) - 1$.

6. Prueba que $\kappa(G) = \min\{\kappa_G(u, v) : u, v \in V(G) \text{ y } uv \notin A(G)\}$.

7. Considera una gráfica G k conexa, $k \geq 1$, y S es cualquier conjunto de k vértices de G. Prueba que si H es la gráfica resultante de añadir un nuevo vértice a G y hacerlo adyacente a cada uno de los vérties de S entonces H también es k-conexa.

8. Prueba que si G es una gráfica k-conexa, $k \geq 2$, y u, v_1, v_2, $\ldots$, v_t son $t + 1$ vértices distintos de G, con $2 \leq t \leq k$, entonces G posee una (u, v_i)-trayectoria para cada $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, tal que cualquier par de esas de esas trayectorias sólo tienen a u en común.

9. Prueba que:

Teorema 1. *Si G es una gráfica k-conexa, $k \geq 2$, entonces para cualquier conjunto de k vértices están en un ciclo en común de G.*

Proof. Tomemos $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de k vértices de G. Entre todos los ciclos de G, sea C uno que contenga un número máximo p de vértices de S. Entonces $p \geq k$. Si $p = k$, ya está, por lo que podemos suponer que $p < k$. Ya que G es k-conexa, G en particular es 2-conexa y, como probamos en clase, $p \geq 2$. Podemos suponer que $v_1, v_2, \ldots, v_p$ están en C. Sea u un vértices de S que no esté en C. Consideremos dos casos.

Caso 1. El ciclo C contiene exactamente p vértices, digamos que $C = (v_1, v_2, \ldots, v_p, v_1)$. Con los resultados previos, llega a una contradicción.

Caso 2. El ciclo C contiene al menos $p+1$ vértices. Escoge algún vértice v_0 en C que no pertenezca a S. Prueba que hay una (u, v_i)-trayectoria P_i por cada $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$ tal que dos a dos sólo se intersectan en u. Para cada P_i, llama u_i al último vértice de C en P_i. Supón que los vértices u_i están ordenados de forma consecutiva en el ciclo módulo p. Prueba que hay un i tal que la trayectoria $C[u_i, u_{i+1}]$ (con $i+1$ módulo p) que no puede contener ningún vértice de S excepto por los extremos. Con los resultados previos, llega a una contradicción. $\square$