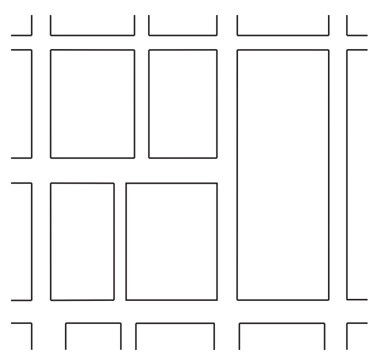
Teoría de las gráficas I

Quinta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. Se entrega en equipos de exactamente dos personas.

Recuerden que las definiciones son las importantes. Para probar algo no siempre es bueno sobreargumentar (ni tampoco quedar falto de argumentos). Los mejores argumentos suelen ser los simples.

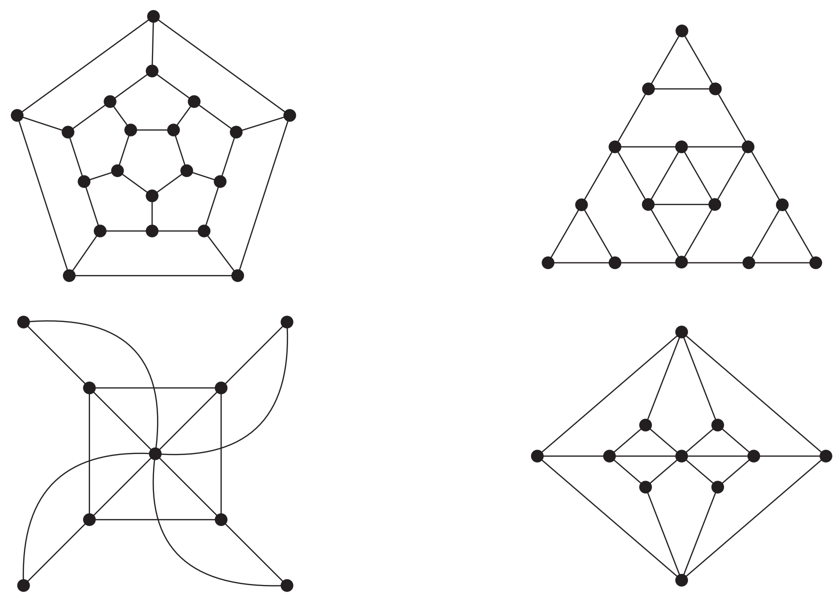
1. Un cartero es responsable de entregar el correo a las casas por ambos lados de la calle, ve el diagrama siguiente. Si el cartero no se cruza de ambos lados para entregar el correo a las casas, ¿será posible que haga un recorrido de tal modo que pase por cada lado de la calle una sóla vez empezando y terminando en un mismo lugar de tal modo que recorra todas las calles?



2. Suponga que hay un grupo de cuatro islas y que entre cualesquiera dos islas hay exactamente un bote que transporta a la gente de una isla a otra. ¿Es posible hacer un viaje (no necesariamente de ida y vuelta) de tal modo que se utilice cada bote exactamente una vez?

3. Prueba que para cualquier gráfica conexa con $2p$ vértices de grado impar, con $p \geq 1$, existe una **partición** de $A(G)$ en p paseos eulerianos abiertos.

4. Determine cuáles de las siguientes gráficas poseen un ciclo o una trayectoria hamiltoniana:



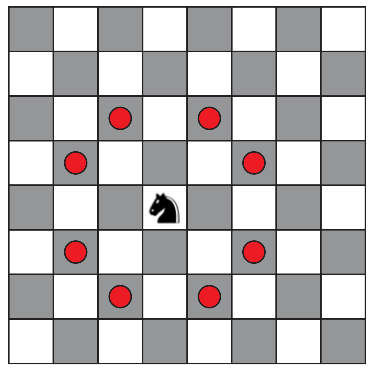
5. Encuentre una gráfica que no sea hamiltoniana tal que para todo $S \subset V(G)$, el número de componentes conexas de $G - S$ es a lo más la cardinalidad de S.

6. Prueba que si dos gráficas G y H son hamiltonianas, entonces la gráfica $G \times H$ también es hamiltoniana. ¿El recíporoco es cierto?

7. (a) Demuestra que si G es euleriana, entonces su gráfica de líneas $\mathrm{L}(G)$ es hamiltoniana.
   (b) Prueba o da un contraejemplo: Si G es hamiltoniana su gráfica de líneas $\mathrm{L}(G)$ es hamiltoniana.
   (c) Prueba que el recíproco del enunciado anterior es falso.

8. Considere un tablero de ajedrez de cuatro por cuatro. Muestra que un caballo de ajedrez puede recorrer todas las casillas del tablero sin repetir ninguna usando movimiéntos válidos. Recuerde que el caballo de ajedrez se mueve en forma de “L”; observa la siguiente figura, las

casillas marcadas en rojo son las casillas a las que el caballo en esa posición se puede mover:



9. Prueba que el n-cubo, Q_n posee un ciclo hamiltoniano para toda $n \geq 3$.

10. ¿Por qué el teorema de Dirac es obvio?

11. Prueba que si en una gráfica G existe un subconjunto S de sus vértices tales que
$$\omega(G - S) > |S| + 1$$
entonces G no posee trayectorias hamiltonianas.

12. Muestra que los recíprocos de los teoremas de Dirac, Ore y Chvátal-Bondy son falsos.

13. Muestra que las cotas de los teorema de Dirac y Ore son justas, es decir, muestra dos gráficas, una en la que el grado mínimo sea mayor o igual que $n/2 - 1$ y otra en la que la suma de cualquier par de vértices no adyacentes sea al menos $n - 1$ tales que no sean hamiltonianas.

14. Encuentra un ejemplo de una gráfica con tres o más vértices regular, conexa, bipartita y sin ciclos hamiltonianos(*Sugerencia.* Piensa en el criterio de la subgráfica).

Extras

A. ¿Es posible que un caballo de ajedrez recorra todas las casillas de un tablero de cinco por cinco con movimientos válidos?

B. Una gráfica G es *hipohamiltoniana* si G no es hamiltoniana y para todo vértice v en G se tiene que $G-v$ es hamiltoniana. Prueba que la gráfica de Petersen es hipohamiltoniana.