Teoría de las gráficas I

Sexta tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea es en equipos de exactamente dos personas. Se entrega el miércoles 31 de octubre **sin prórrogas**.

1. Determina el número total de apareamientos perfectos de $K_{n,n}$.

2. (a) Considera G una gráfica bipartita. Prueba que G posee un apareamiento perfecto si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$, para todo $S \subset V$.

   (b) Da un ejemplo que muestre que la condición anterior no garantiza la existencia de un apareamiento perfecto en gráficas arbitrarias.

3. Considera una gráfica bipartita G con bipartición X, Y tal que todo vértice de X es de grado impar. Supón que cualesquiera dos vértices de X tienen un número par de vecinos en común. Muestra que G posee un apareamiento que satura X.

4. Sea G una gráfica cúbica sin puentes, demuestra que G posee un pareamiento perfecto.

5. Sea M un apareamiento perfecto, en una gráfica G tal que todos sus vértices son de grado impar, prueba que M contiene a todas las aristas de corte de G.

6. Demuestra que toda gráfica 2-conexa que posee un apareamiento perfecto, posee al menos dos apareamientos perfectos. (Sugerencia: Recuerda que dados dos conjuntos S y T, la *diferencia simétrica* de S y T, $S \bigtriangleup T$, es $(S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, lo que es igual a $(S \cup T) \setminus (S \cap T)$).

7. Demuestra que Q_n posee un apareamiento perfecto, para toda $n \in \mathbb{N}$.

8. Ejercicio EXTRA:

   (a) Sea M un apareamiento perfecto de una gráfica G y $S \subset V$. Denotamos por $\delta(S)$ al conjunto de aristas que separan al conjunto S de $V \setminus S$. Demuestra que $|M \cup \delta(S)| \equiv |S| \pmod 2$.

   (b) Deduce que si M es un apareamiento perfecto de la gráfica de Petersen y C es el conjunto de aristas de alguno de sus $5 - ciclos$, entonces $|M \cup C|$ es par.