Teoría de las gráficas I

Sétima y última tarea

Lee, piensa y responde con cuidado. No olvides justificar bien tus respuestas. La tarea es en equipos de exactamente dos personas; se entrega el 23 de noviembre **sin prórrogas**.

1. Muestra que en cualquier gráfica G y para cualquier vértice se tiene que $\chi(G-v) = \chi(G)$ o $\chi(G-v) = \chi(G) - 1$.

2. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_q$ los bloques de G, demuestra que
$$\chi(G) = \text{máx}\,\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq q\}.$$

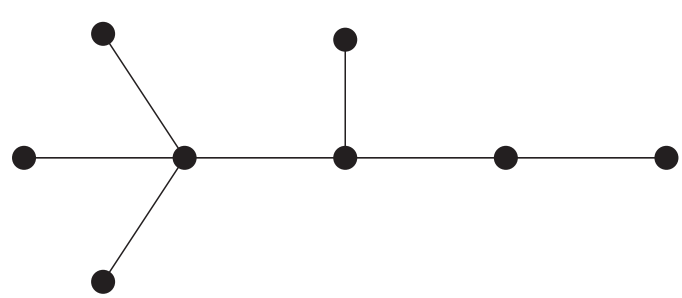
3. Una gráfica G es k-partita si y sólo si G es k-cromática.

4. Sea $\chi'(G)$ el índice cromático, demuestra que
$$\chi'(G) = \{|P'| : P' \text{ es partición de } E(G) \text{ en apareamientos}\}.$$

5. Una coloración balanceada de una gráfica G, es una buena coloración por vértices tal que el número de vértices entre cualesquiera dos clases cromáticas difiere en a lo más uno. El mínimo número de colores usado en una coloración balanceada es el *número cromático balanceado* denotado por $\chi_b(G)$.

   (a) Prueba que $\chi_b(G)$ está definido para cualquier gráfica G.

   (b) Determina $\chi_b(G)$ para la siguiente gráfica:



6. (a) Demuestra que toda subgráfica propia de $K_{3,3}$ es plana.

   (b) Demuestra que $K_{3,3}$ no es plana.

7. Prueba que la gráfica de Petersen tiene una subdivisión de $K_{3,3}$ y concluye que Petersen no es plana.

8. Un k-libro es un espacio topológico de $\mathbb{R}^3$ que consiste en k-cuadrados unitarios, llamados *páginas* que tienen todos un lado común, llamado *lomo*; pero disjuntos dos a dos en otro lado. Demuestra que cualquier gráfica G es encajable en $\mathbb{R}^3$ al mostrar que es encajable en un k-libro para alguna k.

EXTRAS

A. Demuestra que para toda $l, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $2 \leq l \leq k$ existe una gráfica G tal que $\omega(G) = l$ y $\chi(G) = k$, donde $\omega(G)$ denota el número de clan.

B. Sea $n \geq 2$, demuestra que toda gráfica $(n-1)$-cromática de orden n tiene número de clan $n-1$.

C. En clase se demostró que si c es una coloración mínima por vértices, entonces entre cualesquiera dos clases cromáticas hay una arista. ¿Es cierto el enunciado equivalente para una c' coloración mínima por aristas?