MATEMATICAS

ANALES DEL

INSTITUTO DE MATEMATICAS

VOLUMEN 11 AÑO 1971

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Director: Dr. Humberto Cárdenas Trigos

Investigadores:

Raymundo Bautista Ramos

Alejandro Bravo Mojica

Humberto Cárdenas Trigos

Francisco J. González Acuña

Santiago López de Medrano S.

Emilio Lluis Riera

Rodolfo Morales Martínez

Alejandro Odgers López

Francisco F. Raggi Cárdenas

Sevín Recillas Pishmish

Graciela Salicrup López

Francisco Tomás Pons

Guillermo Torres Díaz

Roberto Vázquez García

Gonzalo Zubieta Russi

SEMINUCLEOS DE UNA DIGRAFICA

Víctor Neumann Lara *

1. INTRODUCCION

En esta nota se introducen los conceptos de <u>seminúcleo</u> de una <u>digráfica</u> y de <u>R-digráfica</u> y se demuestra que toda R-digráfica contiene al menos un núcleo. Varios teoremas sobre existencia de núcleos pueden demostrarse, de un modo más transparente, probando que las digráficas que consideran son R-digráficas. Como ilustración del procedimiento, se da una nueva demostración del Teorema de Richardson y se prueba que toda digráfica bipartita es R-digráfica. Se demuestra también que el producto de dos digráficas que poseen núcleos, contiene al menos un núcleo.

2. CONCEPTOS PRELIMINARES

Una <u>digráfica</u> o <u>gráfica dirigida</u> D es un par (V, F) donde V es un conjunto no vacío y F un subconjunto de V^2 que no contiene pares de la forma (v, v). Los elementos de V son los <u>vértices</u> de D y los de F, las <u>flechas</u>. Si $f = (v_1, v_2) \in F$ diremos que f va de v_1 a v_2 y que v_1 y v_2 son las <u>terminales</u> de f.

---

* Profesor de la Facultad de Ciencias e Investigador del C.I.M.A.S.S., U.N.A.M.

Si además $v_1 \in S_1 \subseteq V$ y $v_2 \in S_2 \subseteq V$, se dirá que f va de v_1 a S_2, de S_1 a v_2 y de S_1 a S_2. En general, se denotará por $V(D)$ (o simplemente por V, si no hay ambigüedad) al conjunto de vértices de la digráfica D y por $F(D)$ (ó F) al de sus flechas. Sea $V_o \subseteq V$, $V_o \neq \emptyset$; la subdigráfica D_o de D inducida por V_o se define poniendo $V(D_o) = V_o$, $F(D_o) = F(D) \cap V_o^2$. Se dirá que D_o es una subdigráfica plena o inducida de D si es la subdigráfica de D inducida por $V(D_o)$.

Un camino es una sucesión $(v_o, v_1, \ldots, v_n)$ de vértices tal que $(v_{i-1}, v_i) \in F$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si $v_o = v_n$, el camino se denominará cerrado. La longitud del camino $(v_o, v_1, \ldots, v_n)$ es n. Un ciclo es un camino cerrado $(v_o, v_1, \ldots, v_n)$ tal que cuando $i \neq 0, n$ se tiene $v_i \neq v_j$ para toda $j \neq i$.

$V_o \subseteq V(D)$ es independiente si no existen flechas de D con ambas terminales en V_o. Una digráfica D es bipartita si existe una descomposición de $V(D)$ en dos subconjuntos ajenos independientes.

Si D_1 y D_2 son digráficas, el producto $D_1 \times D_2$ se define poniendo $V(D_1 \times D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$, $F(D_1 \times D_2) = \{((v_1, v_2), (v_1', v_2')) \mid (v_1, v_1') \in F(D_1)$ y $(v_2, v_2') \in F(D_2)\}$.

3. SEMINUCLEOS Y NUCLEOS

DEFINICION 1. Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V$ es un seminúcleo de D, si:

a) S *es independiente.*

b) *Para cada flecha* f *que va de* S *a* x *(en virtud de la condición anterior,* $x \in V - S$*), existe una flecha* f' *que va de* x *a* S*.*

Claramente $\emptyset$ *es un seminúcleo.*

TEOREMA 1. *Todo seminúcleo está incluído en un seminúcleo máximo.*

Demostración. Si D es finita, el teorema es obvio; en caso contrario, es consecuencia directa del siguiente lema y del lema de Zorn.

LEMA 1. *El conjunto de seminúcleos de* D*, ordenado por inclusión, es inductivo superiormente.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena de seminúcleos de D, es decir una colección de seminúcleos tal que si $S_1, S_2 \in \mathfrak{C}$, se tiene $S_1 \subseteq S_2$ ó $S_2 \subseteq S_1$. Pongamos $\mathfrak{U} = \bigcup_{S \in \mathfrak{C}} S$.

a) $\mathfrak{U}$ es independiente, pues si existiera una flecha $f = (v_1, v_2)$ con sus dos terminales en $\mathfrak{U}$, se tendría $v_1 \in S_1 \in \mathfrak{C}$ para algún S_1 y $v_2 \in S_2 \in \mathfrak{C}$ para algún S_2. Luego $v_1, v_2 \in \max(S_1, S_2) \in \mathfrak{C}$ lo que es imposible.

b) Si f es una flecha que va de $\mathfrak{U}$ a x, existen s y S tales que $f = (s, x)$ y $s \in S \in \mathfrak{C}$. Como S es seminúcleo, existe una flecha f' que va de x a S y, por consiguiente a $\mathfrak{U}$. c.q.d.

LEMA 2. Sea S un seminúcleo de D, $B = \{v \in V - S \mid$. No existe flecha de v a $S\}$ y S' un seminúcleo de la subdigráfica $\overline{B}$ de D inducida por B. Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D.

Demostración. Sea f una flecha de u a v. Consideremos los siguientes casos

i) $u \in S$, $v \in S$.

ii) $u \in S'$, $v \in S'$.

iii) $u \in S'$, $v \in S$.

iv) $u \in S$, $v \in S'$.

i) e ii) no pueden cumplirse por ser S y S' independientes. iii) es imposible ya que $S' \subseteq B$. Finalmente, si iv) se cumpliera, existiría otra flecha de S' a S, por ser S seminúcleo, la cual satisfaría iii). Luego $S \cup S'$ es independiente. Pongamos $A = V - (S \cup B)$. Sea f una flecha de $S \cup S'$ a x. Si $x \in A$, obviamente existe una flecha de x a S y por consiguiente, a $S \cup S'$. Si $x \notin A$, f necesariamente sale de S' y llega a $B - S'$ y, por ser S' seminúcleo de $\overline{B}$, existe f' de x a S' y, por consiguiente, a $S \cup S'$. c.q.d.

DEFINICION 2. Sea $S \subseteq V$. S es un núcleo de D si

a) S es independiente.

b) Para todo $x \in V - S$ existe una flecha de x a S.

Es obvio que los núcleos son seminucleos máximos pero no recíprocamente.

Por otra parte, es fácil demostrar, echando mano del Lema 2 que si $B_o, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}$ y $S_o, S_1, \ldots, S_k$ son dos sucesiones de subconjuntos de V tales que:

i) $B_o = V$, $B_k \neq \emptyset$, $B_{k+1} = \emptyset$.

ii) S_i es seminúcleo de la subdigráfica de D inducida por B_i para $i = 0, \ldots, k$.

iii) $B_{i+1} = \{ x \in B_i \mid \text{No existe flecha de } x \text{ a } S_i \}$, $i = 0, \ldots, k$.

entonces $\bigcup_{i=0}^{k} S_i$ es un núcleo de D_o.

DEFINICION 3. <u>Diremos que D es una R-digráfica, si toda subdigráfica plena de D posee un seminúcleo no trivial (es decir, no vacío).</u>

Es evidente que si D es R-digráfica y D_o es subdigráfica plena de D entonces D_o es también R-digráfica.

TEOREMA 2. <u>Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.</u>

<u>Demostración.</u> Sean D una R-digráfica, S un seminúcleo máximo de D, y $B = \{ v \in V - S \mid \text{No existe flecha de } v \text{ a } S \}$.

$B = \emptyset$ pues si se tuviera $B \neq \emptyset$, existiría un seminúcleo $S' \neq 0$ de la subdigráfica $\bar{B}$ de D inducida por B. $S \cup S'$ sería un seminúcleo de D por el lema 2) y contendría propiamente a S lo que contradice la maximalidad de S. c.q.d.

En realidad, como es fácil observar, el que D sea R-digráfica implica que toda subdigráfica plena de D contiene un núcleo.

Daremos ahora, como aplicación del teorema 2, un bosquejo de demostración del Teorema de Richardson.

TEOREMA 3. Si D es finita y no posee ciclos impares, D contiene un seminúcleo.

Demostración. Definamos en V las relaciones $\sim$ y $\lesssim$ poniendo:

a) $v' \lesssim v$ si y sólo si existe en D un camino de v a v'

b) $v \sim v'$ si y sólo si $v \lesssim v'$ y $v' \lesssim v$.

Es fácil ver que $\lesssim$ es un preorden (relación binaria transitiva y reflexiva) y $\sim$ es una equivalencia.

Sea $m_o \in V$ un elemento mínimo* con respecto a $\lesssim$ y $M = \{ m \in V \mid m \sim m_o \}$. Si se toman $S = \{ m \in M \mid$ existe un camino de longitud par de m_o a $m \}$ y $I = \{ m \in M \mid$ existe un camino de longitud impar de m_o a $m \}$ se tiene:

i) $m_o \in S$

ii) $S \cap I = \emptyset$ pues si existiera $s \in S \cap I$, habría un camino de m_o a s de longitud par y otro de longitud impar y además otro de s a m_o por ser $m_o \sim s$. Luego existiría en D un camino cerrado de longitud impar y, por lo tanto, un ciclo impar, en contra de la hipótesis.

Es fácil ver que todas las flechas de D que salen de elementos de S llegan a I y que de cada vértice de I sale alguna flecha

---

* Es decir, tal que $m \lesssim m_o$ implique $m \sim m_o$.

hacia S. De aquí se sigue sin más que S es un seminúcleo de D.

COROLARIO. (Teorema de Richardson). Si D es finita y no posee ciclos impares, D es R-digráfica y, por consiguiente, posee un núcleo.

En [2] se demuestra que toda digráfica bipartita contiene un núcleo. Damos aquí una demostración simple de que las digráficas bipartitas son R-digráficas. Como toda subdigráfica de una digráfica bipartita es bipartita, basta probar que cada digráfica bipartita contiene al menos un seminúcleo. La demostración es como sigue:

Si existe algún vértice v del cual no salen flechas, $\{v\}$ es un seminúcleo. Si no es ése el caso, sea (V_1, V_2) una descomposición de V en conjuntos independientes ajenos. V_1 y V_2 son, claramente, núcleos de D.

Para terminar se verá que el producto de dos digráficas D_1 y D_2 que poseen núcleos, posee al menos un núcleo.

Sean N_1 y N_2 núcleos de D_1 y D_2 respectivamente. Pongamos $N_1' = V(D_1) - N_1$, $N_2' = V(D_2) - N_2$. Se tiene: $S = N_1 \times N_2$ es un seminúcleo de $D_1 \times D_2$. Usando la notación del Lema 2, $B = (N_1 \times N_2') \cup (N_1' \times N_2)$. Ahora bien, como $N_1 \times N_2'$ y $N_1' \times N_2$ son independientes, $\overline{B}$ es bipartita y por consiguiente contiene un núcleo N. Es inmediato que $S \cup N$ es un núcleo de $D_1 \times D_2$.

c. q. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] Claude Berge — The Theory of graphs and its applications. Methuen & Co. Ltd. (1964), Cap. 5.

[2] M. Richardson — On weakly ordered systems. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), p. 113.

[3] M. Richardson — Solutions of irreflexive relations. Ann. Math. (2) 58 (1953), p. 573.

[4] M. Richardson — Extension Theorems for solutions of irreflexive relations. Proc. Nat. Acad. Sci., USA., 39 (1953), p. 649.

[5] Claude Berge — Graphes et hypergraphes. Dunod, París (1970), Cap. 14.