

Matemáticas Discretas II

Tercera lista (para el primer examen parcial)

1º de junio de 2017

1. Calcula las siguientes sumas con $S = \{1, 3, 5, 7\}$.

(a)

$$\sum_{j \in S} j$$

(c)

$$\sum_{j \in S} \frac{1}{j}$$

(b)

$$\sum_{j \in S} j^2$$

(d)

$$\sum_{j \in S} 1$$

2. Calcula las siguientes sumas.

(a)

$$\sum_{j=0}^8 3 \cdot 2^j$$

(e)

$$\sum_{j=0}^8 (1 + (-1)^j)$$

(i)

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (i - j)$$

(b)

$$\sum_{j=1}^8 2^j$$

(f)

$$\sum_{j=0}^8 (3^j - 2^j)$$

(j)

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 (3i + 2j)$$

(c)

$$\sum_{j=2}^8 (-3)^j$$

(g)

$$\sum_{j=0}^8 (2 \cdot 3^j + 3 \cdot 2^j)$$

(k)

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^2 j$$

(d)

$$\sum_{j=0}^8 2 \cdot (-3)^j$$

(h)

$$\sum_{j=0}^8 (2^{j+1} - 2^j)$$

(l)

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 i^2 j^3$$

3. Muestra que

$$\sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ es una sucesión de números reales. Este tipo de suma es una *suma telescópica*.

4. Utiliza la identidad

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

y el ejercicio previo para calcular

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

5. Suma ambos lados de la identidad $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ desde $k = 1$ hasta $k = n$ y utiliza el penúltimo ejercicio para encontrar:

(a) una fórmula para $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$ (la suma de los primeros n números naturales impares) y

(b) una fórmula para $\sum_{k=1}^n k$.

6. Utiliza la técnica del antepenúltimo ejercicio junto con el problema (b) del ejercicio anterior para deducir la fórmula

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(Sugerencia. Toma $a_k = k^3$ en una suma telescópica).

7. Encuentra una fórmula para calcular

$$\sum_{k=0}^m \lfloor \sqrt{k} \rfloor,$$

para cualquier entero positivo m .

8. Encuentra una fórmula para calcular

$$\sum_{k=0}^m \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor,$$

para cualquier entero positivo m .

9. Calcula el valor de los siguientes productos.

(a)

$$\prod_{i=0}^{10} i$$

(c)

$$\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$$

(b)

$$\prod_{i=5}^8 i$$

(d)

$$\prod_{i=1}^{10} 2$$

10. Recuerda que el valor de la función factorial para un entero positivo n , denotada por $n!$, es el producto de los enteros positivos desde uno hasta n . Además, definimos $0! = 1$. Expresa $n!$ por medio de la notación de productos.

11. Toma un número natural n y considera el conjunto $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Muestra que

$$|[1, n]| < |\mathbb{N}|.$$

12. Considera el conjunto $3\mathbb{N} = \{0, 3, 6, \dots\}$. Prueba que

$$|3\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|.$$

13. Prueba que

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|.$$

14. Considera el conjunto:

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_i \in \mathbb{N}\}.$$

Para los equipos de dos y tres personas, resuelve una de las siguientes. Para el resto, las dos.

- (a) Da dos funciones inyectivas para mostrar que $|A| = |\mathbb{N}|$.
- (b) Utiliza el algoritmo de la división para dar una biyección entre A y $\mathbb{N}$.

15. Considera el conjunto

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \cap (0, 1) \text{ y en la expansión decimal de } x \text{ sólo aparecen ceros y unos}\}.$$

Prueba que el conjunto A no es numerable. Es decir, para toda función $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, muestra que f no es suprayectiva.

Recordatorio

Cardinalidad

Consideremos dos conjuntos A y B .

(a)

$$|A| \geq |B|$$

si y sólo si existe una función suprayectiva $f: A \rightarrow B$.

(b)

$$|A| \leq |B|$$

si y sólo si existe una función inyectiva $f: A \rightarrow B$.

(c)

$$|A| = |B|$$

- si y sólo si existen una función $g: A \rightarrow B$ que sea inyectiva y una función $h: A \rightarrow B$ que sea suprayectiva
- si y sólo si existen funciones inyectivas $g: A \rightarrow B$ y $h: B \rightarrow A$

- si y sólo si existen funciones suprayectivas $g: A \rightarrow B$ y $h: B \rightarrow A$
- si y sólo si existe una función biyectiva $f: A \rightarrow B$.

(d)

$$|A| < |B|$$

si y sólo si toda función $f: A \rightarrow B$ no es suprayectiva (la negación de (a)).

(e)

$$|A| > |B|$$

si y sólo si toda función $f: A \rightarrow B$ no es inyectiva (la negación de (b)).