Matemáticas Discretas II
Cuarta lista
30 de mayo de 2017

1. **Naranja, negro, oro.** Utiliza la inducción matemática para demostrar la siguiente generalización de las leyes de De Morgan.

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j},$$

siempre que A_1, A_2, $\ldots$, A_k sean subconjuntos del conjunto universal U y $n \geq 2$.

2. **Verde, limón, morado, amarillo, turquesa, vino.** Utiliza el método de la inducción para probar que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

para todos los enteros n no negativos.

3. **Rosa, azul.** Demuestra por el método de la inducción esta fórmula para la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica:

$$\sum_{i=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1},$$

cuando $r \neq 1$.

4. **Blanco, rojo.** Los *números armónicos* H_j, con $j \in \mathbb{Z}^+$, se definen como

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{j}.$$

Prueba por el método de la inducción matemática que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

para todo número entero no-negativo n.

5. **Gris, guinda, índigo, violeta.** Si S es un conjunto finito con n elementos, prueba por medio de la inducción matemática que

$$|\wp(S)| = 2^n.$$

6. Utiliza la inducción matemática para demostrar que

$$3^n < n!$$

para todo entero positivo mayor que seis.

7. Utiliza la inducción matemática para demostrar que
$$2^n < n!$$
para todo entero positivo mayor que o igual a cuatro.

8. Demuestra que
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
para todo entero positivo n.

9. Demuestra que
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$
para todo entero no-negativo n.

10. Demuestra que
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdots n! = (n+1)! - 1$$
para todo entero positivo n

11. Demuestra usando el principio de la inducción matemática que dado un conjunto de $n+1$ enteros positivos menores que o iguales a $2n$, que existe un entero en este conjunto que divide a otro entero del conjunto.

12. Prueba con el método de la inducción matemática que
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

13. Supongamos que
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$
donde a y b son números reales. Demuestra que
$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$
para todo entero positivo n.

14. Supongamos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas que cumplen que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Demuestra que $\mathbf{AB^n} = \mathbf{B^nA}$ para todo entero positivo n.

15. Considera un entero positivo m. Demuestra usando el método de la inducción matemática que si a y b son números enteros tales que $a \equiv b \mod m$ entonces $a^k \equiv b^k \mod m$ para todo entero no-negativo k.

16. Demuestra utilizando el método de la inducción matemática que si A_1, A_2, $\ldots$, A_n y B son conjuntos entonces

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

17. Demuestra utilizando el principio de inducción que si A_1, A_2, $\ldots A_n$ y B_1, B_2, $\ldots$, B_n son conjuntos tales que $A_k \subseteq B_k$ para $k \in \{1, 2, \ldots, k\}$ entonces

    (a)
    $$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

    (b)
    $$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} B_k$$

18. Demuestra que un tablero de ajedrez tridimensional de $2^n \times 2^n \times 2^n$ en el que se ha quitado un cubo de $1 \times 1 \times 1$ se puede cubrir con cubos de $2 \times 2 \times 2$ sin una de sus esquinas.

19. Demuestra que un tablero de ajedrez de $n \times n$ sin una casilla se puede cubrir con piezas en forma de L de tres casillas si $n > 5$, n es impar y $3 \nmid n$.

20. Demuestra utilizando el método de la inducción matemática que

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

siempre que n sea un entero positivo.