Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas
Lista de ejercicios

Trimestre 2018O

Lee, piensa y responde con cuidado. Argumenta tus respuestas.

1. Considera los predicados siguientes:

$$\begin{aligned} P(x)&: \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \\ Q(x)&: \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\ R(x)&: \quad x < 0. \end{aligned}$$

   Determina la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, en las que nuestro conjunto de referencia son todos los enteros. Si la proposición es falsa, da un contraejemplo o una explicación.

   (a) $\forall x[P(x) \Rightarrow \neg R(x)]$
   (b) $\forall x[Q(x) \Rightarrow R(x)]$
   (c) $\exists x[Q(x) \Rightarrow R(x)]$
   (d) $\exists x[P(x) \Rightarrow R(x)]$

2. Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. El conjunto de referencia en cada proposición son todos los números reales.

   (a) $\forall x(x^2 > x)$
   (b) $\exists x(x^2 > x)$
   (c) $\forall x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$
   (d) $\exists x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$
   (e) $\forall x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$
   (f) $\exists x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$

3. En matemáticas, con frecuencia se debe afirmar no sólo la existencia de un objeto a (ya sea un número, un triángulo, un conjunto, etcétera) que satisfaga una proposición $P(x)$, sino también el hecho de que este objeto a es el único para el que se satisface que $P(x)$ es verdadera. Así, el objeto es *único*. Esto se denota con el cuantificador $\exists! x P(x)$, que se lee «existe un único x que satisface que $P(x)$». Este cuantificador puede definirse en términos de los cuantificadores existencia y universal:

$$\exists! x P(x) \colon [\exists x P(x)] \wedge (\forall x \forall y[(P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow (x = y)]).$$

   Esta definición nos muestra que *una demostración de existencia y unicidad* requiere de *una demostración de existencia*, que con frecuencia se realiza construyendo un ejemplo que satisfaga $P(x)$, y *una demostración de la unicidad*, donde probamos que para cualesquiera dos objetos x y y que satisfagan $P(x)$ y $P(x)$, se tiene que son iguales, es decir, que $x = y$.

(a) Considera la proposición $\exists! x(x^2 = 4)$. Da un ejemplo de un conjunto de referencia en el que la proposición sea verdadera y un ejemplo de otro conjunto de referencia donde la proposición sea falsa.

(b) Sea $P(x, y)\colon y = -2x$, donde el conjunto de referencia está formado por todos los enteros. Determina cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

  (i) $[\forall x \exists! y P(x, y)] \Rightarrow [\exists! y \forall x P(x, y)]$

  (ii) $[\exists! y \forall x P(x, y)] \Rightarrow [\forall x \exists! y P(x, y)]$

4. «Si el compuesto X está en ebullición entonces su temperatura debe ser al menos de 150 °C». Si suponemos que este enunciando es verdadero, ¿cuál de los siguientes también debe ser cierto?

   (a) Si la temperatura del compuesto X es al menos 150 °C entonces el compuesto X está en ebullición.

   (b) Si la temperatura del compuesto X es menor que 150 °C entonces el compuesto X está en ebullición.

   (c) El compuesto X estará en ebullición sólo si su temperatura es de al menos 150 °C.

5. Determina cuales de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsa.

   (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

   (b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

   (d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

   (e) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (f) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   (h) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

6. Dados tres conjuntos A, B y C, demuestra que si $C \times A = C \times B$ y $C \neq \emptyset$ entonces $A = B$.

7. (a) Encuentra el número de formas de acomodar ocho objetos idénticos en un tablero de ajedrez de ocho por ocho de forma tal que no haya dos de ellos en la misma columna ni en la misma fila.

   (b) Supón que los objetos en el inciso (a) son diferentes entre sí, ¿cuál sería el resultado?

8. Encuentra el número de permutaciones de los dígitos 1, 2, …, 9, en las que los dígitos pares e impares estén alternados.

9. Encuentra el número de reordenamiento de la palabra $ABCDEFG$ que contienen lo siguiente:

   (a) La sucesión ABC.

   (b) Las sucesiones AB, CD y EF.

   (c) Las sucesiones AB, BC y EF

10. Encuentra el número de palabras de cinco letras con letras de $\{A, B, \ldots, Z\}$, en las que todas las letras son diferentes y están en orden alfabético.

11. Elegimos tres cartas de forma aleatoria de un mazo de barajas francesas de 52 cartas (que tiene trece valores (As, 2, 3, …, 9, 10, J, Q y K) y cuatro palos ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$ y $\clubsuit$)). Encuentra las siguientes probabilidades:

    (a) Todas sean del mismo palo.

    (b) Todas sean de diferentes palos.

12. Para dos enteros no-negativos n y k, con $k < n$, demuestra que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

13. Demuestra la identidad anterior *combinatoriamente*.

14. Utiliza la fórmula de la expansión binomial para encontrar la suma alternante de los números en la n-ésima fila del triángulo de Pascal:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots$$

15. Para un entero positivo n, demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

16. En el sistema de cifrado WEP para WiFi, una llave es una cadena de 10, 26 o 58 dígitos hexadecimales. ¿Cuántas cadenas de llaves para WEP hay?

17. En México, las placas de circulación constan de una combinación de letras y números, cuya configuración depende del tipo y uso del vehículo así como de la entidad federativa u organismo en el que está registrado dicho vehículo. Los dígitos provienen del conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$, las letras del alfabeto usual, sin incluir las letras I, Ñ, O y Q (para disminuir la posibilidad de confusión) y mantienen el orden usual. Para las vehículos privados de las siguientes entidades federativas, hay intervalos de placas (determinados por la NOM-001-SCT-2-2016 que substituyó a la anterior). A continuación están la primera y la última placa de cada intervalo, determina el número total de placas disponibles para tales estados. (Por cierto, también creen que el cero no es un número natural y excluyen la posibilidad de que sólo aparezcan ceros).

    (a) Aguascalientes, de AAA-001-A hasta AFZ-999-Z.
    (b) Oaxaca, de THA-001-A hasta TMZ-999-Z.
    (c) Estado de México, de LGA-001-A hasta PEZ-999-Z.

18. Si lanzamos cuatro dados simultáneamente, encuentra la probabilidad de que tengamos cada uno de los siguientes:

    (a) Al menos un dado sale seis.
    (b) Ningún dado cae en un número impar.

19. (a) De un conjunto de cinco pares de zapatos, elegimos tres zapatos al azar. Encuentra la probabilidad de que incluyan un par.
    (b) De un conjunto de cinco pares de zapatos, elegimos cuatro zapatos al azar. Encuentra la probabilidad de que incluyan dos pares.

20. Lanzamos siete monedas. Encuentra la probabilidad de que tres caigan de un lado y las otras cuatro, del otro.

21. Prueba que para todo entero positivo n, $(2n)!$ es divisible por $(n!)^2$.

22. Encuentra x y y tales que

$$\binom{100}{0} + 2\binom{100}{1} + 4\binom{100}{2} + \cdots + 2^{100}\binom{100}{100} = x^y.$$

23. Una *mano de póquer* es cualquier colección de cinco cartas de la baraja francesa. Encuentra la *probabilidad* de recibir una de las manos siguientes:

    (a) *Escalera de color* ('straight flush'): cinco cartas consecutivas del mismo palo, en donde el as podemos contarlo, ya sea como la carta más alta (después del rey) o más baja (como uno).

    (b) *Póquer* ('four of a kind'): cuatro cartas del mismo valor más una quinta carta.

    (c) *'Full house'* (tercia y par): tres cartas del mismo valor y dos de otro valor.

    (d) *Color* ('flush'): cinco cartas del mismo palo.

    (e) *Doble par* ('two pair' o 'pocket'): dos pares del mismo valor cada uno.

24. Encuentra el número de combinaciones de diez letras (permitiendo repeticiones) del conjunto $\{A, B, C\}$ que contengan:

    (a) al menos una letra de cada una,

    (b) al menos dos de cada letra,

    (c) al menos una A, dos B y tres C,

    (d) cualquier número de cada letra y

    (e) al menos una A y dos B.

25. (a) Encuentra el número de formas de ordenar m perros y n gatos en una fila, de forma tal que los gatos estén separados entre sí. (Verifica tu resultado para el caso $n = 1$, debe darte $(m + 1)!$).

    (b) Si ordenamos al azar m perros y n gatos en una fila, encuentra la probabilidad de que los gatos estén todos separados entre sí.

26. (a) Prueba algebraicamente que para cualesquiera enteros no-negativos $n \geq m \geq k$, se tiene que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

    (b) Encuentra una explicación combinatoria al resultado anterior.

27. Evalúa la suma

$$\binom{100}{0} + \frac{1}{2}\binom{100}{1} + \frac{1}{3}\binom{100}{2} + \cdots + \frac{1}{101}\binom{100}{100}.$$

28. Encuentra el número de formas de poner siete pelotas rojas y ocho pelotas azules en tres cajas si

    (a) cada caja contiene al menos una de cada color o

    (b) cada caja contiene al menos dos de cada color.

29. Encuentra el número de reórdenes de la palabra $AABBCCDDEE$ tales que se satisfacen cada una de las condiciones siguientes.

(a) Las dos A aparecen juntas.

(b) Las dos A aparecen separadas.

(c) Las cuatro vocales (A, A, E, E) están todas separadas.

30. (a) Encuentra el número de formas de reordenar la palabra $AARDVARK$.

    (b) ¿Qué pasa si cada R debe estar precedida de una A?

    (c) ¿Qué pasa si no pueden aparecer más de dos A juntas?

31. Encuentra el coeficiente de X^2Y^4Z en la expansión de cada una de las siguientes:

    (a) $(2X + Y - Z)^7$

    (b) $(X + Y^2 + Z)^5$

    (c) $(Y + Z - X^2 + 2)^9$

32. Encuentra el número de combinaciones de cinco letras del alfabeto usual $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ permitiendo repetición.

33. Encuentra el número de sucesiones no-decrecientes de longitud diez

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{10}$$

que consistan de enteros del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

34. Considera dos conjuntos ajenos y finitos A y B. Recuerda que para un número natural n, definimos $I_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$; en particular, para $n = 0$, tenemos que $I_0 = \emptyset$. Si $f\colon A \to I_n$ y $g\colon B \to I_m$ son dos funciones biyectivas, donde n y m son números naturales, prueba que la función $h\colon A \cup B \to I_{n+m}$, tal que para $x \in A \cup B$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \text{ y} \\ g(x) + n & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es biyectiva. ¿Qué se concluye de este resultado?

35. Utiliza el resultado anterior para encontrar el número de distribuciones de cinco pelotas en tres cajas distintas sin cajas vacías.

36. Encuentra el número de formas de distribuir dieciocho pelotas de seis colores (tres de cada color) en tres cajas.

37. Encuentra el número de formas de distribuir tres pelotas rojas, cuatro pelotas azules y cinco pelotas verdes en cuatro cajas distintas sin cajas vacías.

38. Usa la fórmula de inclusión/exclusión para explicar la fórmula que cuenta el número de desórdenes de una cadena de longitud n, donde todos las letras son diferentes

$$D_n = \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)!$$

(¿Por qué no hay términos para $k = 0$ y $k = 1$?).

39. Encuentra el número de reórdenes de 12345 en los que 1, 2 y 3 quedan fuera de su posición original.

40. Encuentra el número de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 210\}$ que son primos relativos con 210.

41. (a) Encuentra el número de enteros en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 120\}$ que son divisibles por al menos uno de los siguientes: 2, 3, 5 o 7.
    (b) ¿Cuántos enteros que contamos en el inciso previo son primos?
    (c) De los entero $\{1, 2, \ldots, 120\}$ que *no* contamos en (a), el único que no es primero es uno. Explica por qué el resto son primos.
    (d) Usa los resultados previos para determinar el número de primos menores que o iguales a 120.

42. Considera una caja con veinte lápices de colores diferentes, en la que los lápices están ordenados consecutivamente. ¿De cuántas formas podemos elegir seis lápices si no permitimos que se escojan lápices contiguos?

43. Encuentra todas los árboles no isomorfos de orden siete.

44. Considera T un árbol con V_1 el conjunto de hojas de T y V_3 el conjunto de vértices de grado mayor o igual que dos de T. Prueba que:

$$|V_1| = \sum_{v \in V_3} d(v) - 2|V_3| + 2.$$

45. Muestra que no exista una gráfica con vértices de grado:
    (a) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5.
    (b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
    (c) 0, 2, 2, 3, 4, 5, 6.

46. (a) Encuentra una gráfica 3-regular con diez vértices.
    (b) Explica porque no puede existir una gráfica 3-regular con once vértices.

47. Sea T un árbol de orden n tal que $d(v) \in \{1, 3\}$, para todo $v \in V(T)$. Prueba que T contiene $\frac{n-2}{2}$ vértices de grado 3.

48. Dada una gráfica G de orden n, si para todo vértice v en $V(G)$ se satisface que

$$d_G(v) \geq \frac{n-1}{2},$$

muestra que G es conexa.

49. Caracteriza todas las gráficas G con la propiedad que **toda** subgráfica inducida de G es conexa.

50. Prueba que toda gráfica tiene una trayectoria de longitud al menos $\delta(G)$ (recuerda que dada una gráfica G, $\delta(G)$ es el mínimo de los grados de los vértices de G). *Sugerencia.* Considera una trayectoria de longitud máxima y revisa en dónde viven los vecinos de uno de los extremos.

51. Demuestra que si G es una gráfica inconexa entonces su complemento $\overline{G}$ es conexa.

52. Dados dos algoritmos C y D con funciones de complejidad $f(n)$ y $g(n)$, definidas sobre todos los números enteros positivos, determina si el algoritmo C es más o menos eficiente que el algoritmo D o si las funciones de complejidad son del mismo orden.

(a) $f(n) = 2n^3 + n^2\sqrt{n}$, $g(n) = 2n^2 \log n + 3n$

(b) $f(n) = 2^n + 10n^{10}$, $g(n) = n! + 3^n$

53. Determina cuáles de las siguientes funciones reales definidas en los reales positivos tienen orden $\mathcal{O}(x)$.

(a) $f(x) = 10$

(b) $f(x) = x^2 + x + 1$

(c) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(d) $f(x) = 3x + 7$

(e) $f(x) = 5 \log x$

(f) $f(x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil$

54. Determina cuáles de las siguientes funciones reales definidas en los reales positivos tienen orden $\mathcal{O}(x^2)$.

(a) $f(x) = 17x + 11$

(b) $f(x) = x^4 + 1000$

(c) $f(x) = \frac{x^4}{2}$

(d) $f(x) = 3^x$

(e) $f(x) = \lceil x \rceil \cdot \lfloor x \rfloor$

(f) $f(x) = x \log x$

55. Encuentra el menor entero n tales que $f(x)$ es $\mathcal{O}(x^n)$ para las funciones siguientes:

(a) $f(x) = 2x^3 + x^2 \log x$

(b) $f(x) = 3x^3 + (\log x)^4$