Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas
Primera tarea

Trimestre 2018O — Nombre: ____________________
27 de septiembre de 2018 — Matrícula: ____________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. (a) Si la proposición Q es verdadera, determine todas las asignaciones de valores de verdad para las proposiciones P, R y S para que la proposición

$$[Q \Rightarrow ((\neg P \vee R) \wedge \neg S)] \wedge [\neg S \Rightarrow (\neg R \wedge Q)]$$

sea verdadera.

(b) Responde la parte (a) si Q fuese falsa.

2. Considera los predicados siguientes:

$$\begin{aligned} P(x)&: \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \\ Q(x)&: \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\ R(x)&: \quad x < 0. \end{aligned}$$

Determina la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones, en las que nuestro conjunto de referencia son todos los enteros. Si la proposición es falsa, da un contraejemplo o una explicación.

(a) $\forall x[P(x) \Rightarrow \neg R(x)]$

(b) $\forall x[Q(x) \Rightarrow R(x)]$

(c) $\exists x[Q(x) \Rightarrow R(x)]$

(d) $\exists x[P(x) \Rightarrow R(x)]$

3. Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. El conjunto de referencia en cada proposición son todos los números reales.

(a) $\forall x(x^2 > x)$

(b) $\exists x(x^2 > x)$

(c) $\forall x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$

(d) $\exists x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$

(e) $\forall x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$

(f) $\exists x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$

4. Considera las proposiciones P, Q y R, construye la tabla de verdad de las siguientes proposiciones compuestas y determina cuáles son tautologías.

   (a) $P \Rightarrow P$

   (b) $\neg(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg P$

   (c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

   (d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$

   (e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

   (f) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

5. Utiliza tablas de verdad para comprobar las siguientes equivalencia:

   (a) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

6. Consideremos dos proposiciones P y Q, se define la *disyunción exclusiva* $\veebar$ como

$$P \veebar Q \colon (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

   (a) Da la tabla de verdad para $\veebar$.

   (b) Determina si las siguientes proposiciones acerca de los números enteros es verdadera o falsa:

      (i) $[3 + 1 = 4] \veebar [2 + 5 = 7]$

      (ii) $[3 + 1 = 4] \veebar [2 + 5 = 9]$

      (iii) $[3 + 1 = 7] \veebar [2 + 5 = 7]$

      (iv) $[3 + 1 = 7] \veebar [2 + 5 = 9]$

   (c) Demuestra que $P \veebar Q \Leftrightarrow \neg(P \Leftrightarrow Q)$ es una tautología.

7. En matemáticas, con frecuencia se debe afirmar no sólo la existencia de un objeto a (ya sea un número, un triángulo, un conjunto, etcétera) que satisfaga una proposición $P(x)$, sino también el hecho de que este objeto a es el único para el que se satisface que $P(x)$ es verdadera. Así, el objeto es *único*. Esto se denota con el cuantificador $\exists! x P(x)$, que se lee «existe un único x que satisface que $P(x)$». Este cuantificador puede definirse en términos de los cuantificadores existencia y universal:

$$\exists! x P(x) \colon [\exists x P(x)] \wedge (\forall x \forall y [(P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow (x = y)]).$$

   Esta definición nos muestra que *una demostración de existencia y unicidad* requiere de *una demostración de existencia*, que con frecuencia se realiza construyendo un ejemplo que satisfaga $P(x)$, y *una demostración de la unicidad*, donde probamos que para cualesquiera dos objetos x y y que satisfagan $P(x)$ y $P(x)$, se tiene que son iguales, es decir, que $x = y$.

   (a) Considera la proposición $\exists! x(x^2 = 4)$. Da un ejemplo de un conjunto de referencia en el que la proposición sea verdadera y un ejemplo de otro conjunto de referencia donde la proposición sea falsa.

   (b) Sea $P(x, y) \colon y = -2x$, donde el conjunto de referencia está formado por todos los enteros. Determina cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

      (i) $[\forall x \exists! y P(x, y)] \Rightarrow [\exists! y \forall x P(x, y)]$

      (ii) $[\exists! y \forall x P(x, y)] \Rightarrow [\forall x \exists! y P(x, y)]$