Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas
Segunda tarea (algunas respuestas)

Trimestre 2018O
6 de octubre de 2018

Nombre: ____________________
Matrícula: ____________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Argumenta tus respuestas. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

15. Si lanzamos cinco monedas simultáneamente, encuentra la probabilidad de que tengamos cada uno de los siguientes:

    (a) Al menos una moneda cae «águila».

    (b) A lo más una moneda cae «águila».

    Respuesta. Si tenemos dos monedas indistinguibles entre sí, al lanzarlas no necesariamente caen ambas águila o ambas sol y que sean indistinguibles no significa que sean intercambiales o que al lanzarlas no podamos decidir cuál es cuál. Al contarlas (una, dos, tres, cuatro y cinco), implícitamente estamos numerándolas. La primera moneda puede caer águila o sol, la segunda moneda puede caer águila o sol y así, hasta la quinta moneda. Por lo tanto, hay 2^5 posibles resultados al lanzar cinco monedas simultáneamente.

    ¿De cuántas formas podemos obtener que **al menos** una moneda caiga águila? Para ello, contemos el caso complementario, es decir, cuando ninguna moneda cae águila. Si ninguna moneda cae águila, significa que todas caen sol. ¿De cuántas formas pueden caer todas sol? De una sola: sol, sol, sol, sol y sol. Por lo tanto, en el resto de los casos (que son $2^5 - 1$), al menos una moneda cae águila. Así, la probabilidad de que al menos una moneda caiga águila es

    $$\frac{2^5 - 1}{2^5}.$$

    ¿De cuántas formas podemos obtener que **a lo más** una moneda caiga águila? Si ninguna cae águila (es decir, obtenemos sol, sol, sol, sol y sol), caemos en el caso. Si una moneda cae águila y el resto sol, también caemos en el caso. ¿De cuántas formas una moneda cae águila y el resto sol? Puede ser que la primera caiga águila y el resto sol, o la segunda caiga águila y le resto sol, o la tercera, o la cuarta o la quinta. Por lo tanto, hay cinco posibilidades de que exactamente una moneda caiga águila. Cualquier otro caso, no cae en nuestro supuesto. Así, existen seis casos en los que a lo más una moneda cae águila, por lo tanto, la probabilidad es de

$$\frac{6}{2^5}.$$

¿En qué se diferencia con respecto a la elección de cartas de un mazo de barajas francesas? Si nos preguntan, ¿de cuántas maneras se pueden repartir tres cartas? Para la primera carta, nos dan una de entre 52 diferentes cartas. Por lo tanto, hay 52 posibles formas en que nos den una primera carta. Para la segunda carta, sólo quedan 51 cartas en el mazo. Por lo tanto, hay 51 posibles formas en que nos den una segunda carta. Finalmente, para la tercera carta, sólo 50 cartas en el mazo y, por lo tanto, hay 50 posibles formas en que nos den una tercera carta. Es decir, contamos

$$52 \cdot 51 \cdot 50$$

formas, que corresponden con todas las cadenas de longitud tres con símbolos tomados de la baraja francesa (sin repetición, puesto que sólo disponemos de una carta por cada valor y palo). Supongamos que nos dieron 3♠Q♥A♣, en ese orden. Pero también pudieron habernos dado 3♠A♣Q♥ (que forma una cadena diferente de las $52 \cdot 51 \cdot 50$ cadenas que contamos). Sin embargo, en los dos casos nos dieron las mismas tres cartas, que en este caso es lo que cuenta. En la figura 1 aparecen todas las posibles formas en cómo

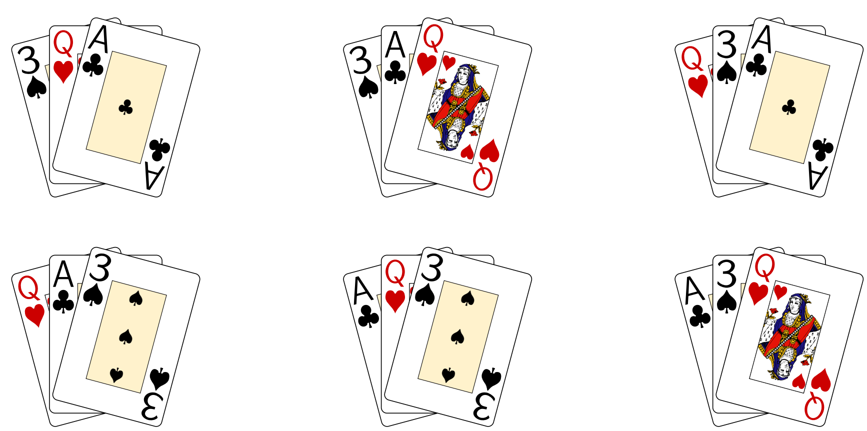

Figura 1: Posibles formas de repartir las mismas tres cartas

nos pudieron entregar las mismas tres cartas. La primera carta nos la pueden dar de tres formas diferentes, para las segunda sólo nos quedan dos, por lo que nos la pueden dar de dos formas diferentes y para la última, sólo queda una. Por lo tanto, las tres cartas nos las pueden dar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ formas posibles (que corresponde con las permutaciones de un conjunto de tres elementos).

Es decir, al contar las cadenas, estamos repitiendo las mismas tres cartas en seis cadenas diferentes. Por lo tanto, el número total de formas en cómo nos pueden repartir tres cartas es

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3!}.$$

19. Supón que escogemos al azar y en un orden en particular diez días del año, sin incluir el 29 de febrero, formando una sucesión (donde podemos repetir días).

    (a) Cuenta las sucesiones en las que los diez día son diferentes.

    (b) Encuentra la probabilidad de que los diez días sean diferentes.

    Respuesta. Nos piden una sucesión (o cadena) de longitud diez en la que podemos repetir días. Nuestro conjunto de días podemos verlo como $\{1, 2, 3, \ldots, 364, 365\}$ (dado que existe una biyección entre el conjunto de todos los días del año —número de día y mes— y tal conjunto). Así, ¿cuántas cadenas de longitud diez con símbolos tomados del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 364, 365\}$ hay? Para la primera entrada, podemos elegir de entre 365 símbolos, para la segunda entrada, podemos elegir de entre 365 símbolos y así sucesivamente. Por lo tanto, hay un total de 365^{10} posibles cadenas.

    De las cadenas de longitud diez, ¿en cuántas todos los días son diferentes? En tal caso, hay 365 formas de elegir el primer día. Para el segundo, no podemos repetir el día que ya escogimos, por lo que quedan 364 posibles días. Para el tercero, no podemos repetir los dos anterior, por lo que nos quedan 363 posibles días y continuamos así. Por lo tanto, hay

    $$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361 \cdot 360 \cdot 359 \cdot 358 \cdot 357 \cdot 356 = \frac{365!}{(365-10)!}$$

    posibles cadenas.

    La probabilidad de que elijamos una cadena en la que todos los días sean diferentes la obtenemos al dividir el número de todas las cadenas que cumplen la propiedad deseada entre el número total de posibles cadenas. Es decir,

    $$\frac{\frac{365!}{(365-10)!}}{365^{10}}.$$

20. Supón que en un grupo de personas dado, ninguna persona cumple años el 29 de febrero.

    (a) Si hay diez personas en el grupo, determina la probabilidad de que al menos dos cumplan años el mismo día (tanto el número del día como el mes).

    (b) ¿Qué tan grande debe ser el grupo para que haya más de 50 % de probabilidad que al menos dos personas del grupo cumplan el mismo día?

    Respuesta. Si en un grupo tenemos diez personas, es porque podemos contarlas, y tenemos una primera persona, una segunda persona, etcétera, hasta una décima persona. Los cumpleaños de cada una de las personas del grupo forma una cadena, en la primera posición de la cadena ponemos el cumpleaños de la primera persona, en la segunda posición, el de la segunda persona y así continuamos, hasta llenar los diez espacios.

    Para determinar la probabilidad de que dos personas cumplan el mismo día, debemos contar todas las cadenas con al menos dos entradas iguales. Como en otros problemas de conteo, resulta más fácil contar las cadenas que no cumplen que tienen al menos dos entradas iguales, es decir, queremos contar las cadenas que tienen todas las entradas diferentes. Lo hicimos en el problema anterior, son $\frac{365!}{(365-10)!}$. El resto de las cadenas, que serían $365^{10} - \frac{365!}{(365-10)!}$, son las cadenas que si tienen al menos dos entradas iguales (y, por cómo las construimos, significaría que hay al menos dos personas que cumplen años el mismo día). Por lo tanto, la probabilidad es:

$$\frac{365^{10} - \frac{365!}{(365-10)!}}{365^{10}}.$$

Si deseamos generalizar lo anterior, ¿qué probabilidad hay que en un grupo de k personas, dos cumplan el mismo día? Tendríamos:

$$\mathrm{P}(k) = \frac{365^{k} - \frac{365!}{(365-k)!}}{365^{k}}.$$

En la página del curso, está la liga para acceder a una hoja de cálculo en la que aparece el valor de la probabilidad anterior para grupos desde una persona (la probabilidad es cero), hasta 28 personas. Para un grupo de 22 personas, la probabilidad de que dos personas cumplan el mismo día es de aproximadamente 0.4757 y para un grupo de 23 personas, es de 0.5073. Por lo tanto, la respuesta la segundo inciso es de, al menos, 23 personas.