Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas
Ejercicios adicionales para el primer examen

Trimestre 2018O

Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. (a) Demuestra que la proposición $((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (R \wedge \neg R)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ es una tautología.
   (b) ¿Qué nos dice lo anterior?
2. ¿El enunciado «Este enunciado es falso» es una proposición?
3. Da las tablas de verdad de las proposiciones siguientes.
   (a) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R) \Rightarrow S$.
   (b) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (R \Leftrightarrow S)$.
4. Prueba que los enunciados $P \Leftrightarrow Q$ y $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ son tautológicamente equivalentes.
5. ¿Cuál es el valor de verdad de las proposiciones siguientes?
   (a) $\exists! x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
   (b) $\forall x P(x) \Rightarrow \exists! x P(x)$
   (c) $\exists! x \neg P(x) \Rightarrow \neg \forall x P(x)$
6. Supón que x es un número real dado, determina si las siguientes proposiciones son tautológicamente equivalentes.
   (a) $x < 2$ o no es cierto que $1 < x < 3$.
   (b) $x \leq 1$ o $(x < 2$ o $x \geq 3)$.
7. ¿Cuál es la cardinalidad de A^n si A tiene cardinalidad m y n es un número entero positivo.
8. Si A, B y C son tres conjuntos diferentes del vacío, demuestra que $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.
9. Si A es cualquier conjunto, prueba que $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

10. Dados tres conjuntos A, B y C, demuestra que si $C \times A = C \times B$ y $C \neq \emptyset$ entonces $A = B$.

11. La *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B, se denota y define como:

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Prueba que $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

12. Determina cuales de las proposiciones siguientes son verdaderas o falsa.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
(d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
(e) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(f) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
(h) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

13. ¿Cuántas funciones $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ hay?

14. ¿Cuántas funciones $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ hay?

15. Prueba que el número de subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tienen cardinalidad impar es 2^{n-1}.

16. Una compañía tiene veinte empleados: doce mujeres y ocho hombres. ¿De cuántas formas se puede formar un comité de cinco empleados que debe tener al menos un hombre al menos una mujer?

17. Un campeonato deportivo tiene participantes de 49 países. La bandera cada país participante tiene tres franjas horizontales del mismo tamaño con colores diferentes, pero sólo aparecen los colores rojo, blanco, azul y verde. ¿Es cierto que existen tres países participantes con la misma bandera?

18. En 2002, 17 lenguas se hablaban por al menos diez millones de personas en países pertenecientes a la Unión Europea. Para cualquiera dos de estas lenguas, la Comisión Europea utiliza a un traductor que puede traducir los documentos de una lengua a otra y viceversa. Un periodista observó que, cuando fueran incorporados algunos nuevos países a la Unión, el número de lenguas habladas por al menos diez millones de personas sería de 22 y *se necesitarían más de cien nuevos traductores.* ¿Estaba en lo correcto? (Ningún traductor traduce más de dos lenguas).

19. ¿De cuántas formas podemos reordenar la cadena 1223456 de forma tal que dígitos iguales no sean consecutivos?

20. ¿De cuántas formas podemos reordenar la cadena 1122345 de forma tal que haya dos unos consecutivos?

21. Un cajero quiere trabajar cinco días a la semana, pero el desea que siempre el sábado o el domingo sean libres. ¿De cuántas formas puede escoger los días que trabajará?

22. Un agente de ventas tiene que visitar cuatro ciudades, al menos cinco veces cada una de ellas. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo, si no se le permite que empiece y termine en la misma ciudad?

23. Una profesora universitaria ha trabajado en el mismo departamento por veinte años. Ella imparte dos cursos cada trimestre. El departamento ofrece quince cursos diferentes. ¿Hubo al menos dos trimestres en los que la profesora dio los mismos cursos?

24. (a) Tres amigos, llamados A, B y C, juegan un torneo de ping-pong cada día de una semana dada. No hay empates al final del torneo. Prueba que hay dos días en el que el orden final de los tres participantes es el mismo.

    (b) Una cuarta persona, llamada D, se une a los tres anteriores. Estos cuatro amigos juegan un torneo de tenis cada día por cinco días. Cuando las cinco semanas terminan, uno de ellos cae en cuenta que en ninguno de sus juegos hubo empate en el primer lugar ni en el segundo lugar. ¿Es cierto que hubo dos días en los que el orden final de los jugadores fue el mismo?

25. Si b_1, b_2, …, b_k son enteros positivos que suman menos de n, prueba que

$$b_1!b_2!\cdots b_k! < n!.$$

26. En la isla de Combinatoria, todos los vehículos tienen placas que consisten de seis dígitos numéricos. Un testigo de un crimen sólo pudo dar una información parcial del vehículo. En particular, él observó que la placa del vehículo era de Combinatoria y sólo había un dígito que aparecía más de una vez y que tal dígito aparecía tres veces. Un policía estimó que, con esta información, podría excluir a más del 90 % de los vehículos como sospechosos. ¿Su estimación fue correcta?

27. ¿Cuántos subconjuntos de un conjunto de cien elementos tienen más de un elemento?

28. Una cadena de hambugueserías afirma que hay 1024 formas en las que puedes pedir tu hamburguesa, ¿por qué es así?

29. Un *palíndromo* es una cadena que leída al revés es idéntica a la cadena original. ¿Cuántas cadenas de bits de lonigtud n son palíndromas?

30. La información hereditaria de todo organismo viviente está codificada por medio de ácido desoxirribonucleico (ADN) o, en ciertos casos, de ácido ribonucleico (ARN), las cuales son moléculas muy complejas. El ADN, brevemente, consta de dos tiras que están formada de bloques llamados *nucleótidos*. Cada nucleótido tiene subcomponentes llamados *bases*, que pueden ser adenina (A), citosina (C), guanina (G) o timinia (T). Las dos tiras de ADN se mantiene unidas por medio de enlaces de hidrógeno, que conectan A sólo con T y C sólo con G. A diferencia del ADN, el RNA es una sola tira, donde el uracilo (U) reemplaza a la timina como base. Así, en el ADN sólo es posible pares del tipo A-T y C-G y en el ARN son A-U y C-G. El ADN de los seres vivos consta de varias piezas de ADN que forman cromosomas separados. Un gen es

un segemento de una molécula de ADN que codifica una proteína en particular. Toda la información genética de un ser vivo se conoce como genoma.

Cuántas cadenas de bases de ADN de longitud hay, que satisfagan lo siguiente:

(a) Que no contengan la base T.

(b) Que no contengan la cadena ACG.

(c) Que contengan exactamente las cuatro bases, A, T, C y G.

(d) Que contengan exactamente tres de las cuatro bases.

31. Si en una universidad hay 75 estudiantes de matemáticas y 108 de computación.

    (a) ¿De cuántas formas se pueden elegir dos representantes, de forma tal que uno sea de matemáticas y otro de computación?

    (b) ¿De cuántas formas se puede elegir un representante, que sea estudiante de matemáticas o de computación?

32. Una estudiante debe estudiar 26 horas para prepararse para un examen. Ella hará esto durante seis días consecutivos. En cada uno de estos, ella estudiará cuatro, cinco o seis horas. ¿De cuántas formas es posible hacerlo?

33. Un edificio de oficina consta de 27 pisos y 37 oficinas por piso, ¿cuántas oficinas hay en el edificio?

34. Un examen de opción múltiple contiene diez preguntas. Hay cuatro opciones por cada pregunta:

    (a) ¿De cuántas formas se puede responder el examen, si cada estudiante responde todas las preguntas?

    (b) ¿De cuántas forams se puede responder el examen, si el estudiante puede dejar preguntas en blanco?

35. Una marca de playeras viene en doce colores, tiene versiones para mujeres y para hombres y viene en tres tamaños para cada sexo. ¿Cuántos tipos dfierentes de playeras se hacen?

36. ¿Cuántas iniciales de tres letras pueden tener las personas?

37. ¿Cuántas iniciales de tres letras pueden tener las personas, si no se repiten letras?

38. ¿Cuántas iniciales de tres letras, que empiezan con la letra A, hay?

39. ¿Cuántos enteros hay entre 5 y 31?

    (a) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 3?

    (b) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 4?

    (c) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 3 y entre 4?

40. ¿Cuántos enteros hay entre 50 y 100?
    (a) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 7?
    (b) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 11?
    (c) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 7 y entre 11?

41. ¿Cuántos enteros hay entre 100 y 999, inclusive?
    (a) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 7?
    (b) De esos, ¿cuántos son impares?
    (c) De esos, ¿cuántos son tienen los mismos tres dígitos?
    (d) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 3 o entre 4?
    (e) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 3 o entre 4, pero no por ambos?
    (f) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 3, pero no entre 4?
    (g) De esos, ¿cuántos son divisibles entre 3 y entre 4?

42. En el sistema de cifrado WEP para WiFi, una llave es una cadena de 10, 26 o 58 dígitos hexadecimales. ¿Cuántas cadenas de llaves para WEP hay?

43. En México, las placas de circulación constan de una combinación de letras y números, cuya configuración depende del tipo y uso del vehículo así como de la entidad federativa u organismo en el que está registrado dicho vehículo. Los dígitos provienen del conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$, las letras del alfabeto usual, sin incluir las letras I, Ñ, O y Q (para disminuir la posibilidad de confusión) y mantienen el orden usual. Para las vehículos privados de las siguientes entidades federativas, hay intervalos de placas (determinados por la NOM-001-SCT-2-2016 que substituyó a la anterior). A continuación están la primera y la última placa de cada intervalo, determina el número total de placas disponibles para tales estados. (Por cierto, también creen que el cero no es un número natural y excluyen la posibilidad de que sólo aparezcan ceros).
    (a) Aguascalientes, de AAA-001-A hasta AFZ-999-Z.
    (b) Oaxaca, de THA-001-A hasta TMZ-999-Z.
    (c) Estado de México, de LGA-001-A hasta PEZ-999-Z.

44. Si lanzamos cuatro dados simultáneamente, encuentra la probabilidad de que tengamos cada uno de los siguientes:
    (a) Al menos un dado sale seis.
    (b) Ningún dado cae en un número impar.

45. Se llama *mano de póquer* a cualquier colección de cinco cartas de la baraja francesa. Un *póquer* consiste en cuatro cartas del mismo número y un *full* consiste en una tercia (tres cartas del mismo número) y un par (dos cartas del mismo número). Determina la probabilidad de, que al recibir una mano de póquer, obtengas:
    (a) un póquer o
    (b) un *full*.