Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas
Tercera tarea

Trimestre 2018O
18 de octubre de 2018

Nombre: ______________________
Matrícula: ______________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Argumenta tus respuestas.

1. Desarrolla el triángulo de Pascal hasta la línea 12.

2. Encuentra algo que puedas hacer en mil y una maneras.

3. Simplifica las siguientes fracciones:

   (a) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}$ (b) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$ (c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}}$

4. (a) De un conjunto de cinco pares de zapatos, elegimos tres zapatos al azar. Encuentra la probabilidad de que incluyan un par.
   (b) De un conjunto de cinco pares de zapatos, elegimos cuatro zapatos al azar. Encuentra la probabilidad de que incluyan dos pares.

5. Lanzamos siete monedas. Encuentra la probabilidad de que tres caigan de un lado y las otras cuatro, del otro.

6. Prueba que para todo entero positivo n, $(2n)!$ es divisible por $(n!)^2$.

7. Encuentra x y y tales que:

$$\binom{7}{5} + 10\binom{7}{4} + \binom{10}{2}\binom{7}{3} + \binom{10}{3}\binom{7}{2} + \binom{10}{4}7 + \binom{10}{5} = \binom{x}{y}.$$

   Explícalo combinatoriamente.

8. Encuentra x y y tales que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{x}{y}.$$

9. Encuentra el coeficiente de X^8Y^5 en la expansión de cada una de las siguientes.

(a) $(X+Y)^{13}$ (b) $(2X-Y)^{13}$

10. Encuentra el coeficiente de X^6 en la expansión de cada uno de los siguientes.

    (a) $(X+2)^{10}$ (b) $(X^3-1)^7$

11. Encuentra x y y tales que

$$\binom{100}{0} + 2\binom{100}{1} + 4\binom{100}{2} + \cdots + 2^{100}\binom{100}{100} = x^y.$$

12. Encuentra el número de palabras de ocho letras que usan letras del conjunto $\{A, B, C\}$ y que contenga exactamente tres A.

13. Una *mano de póquer* es cualquier colección de cinco cartas de la baraja francesa. Encuentra el número de manos póquer de cada uno de los tipos siguientes.

    (a) *Escalera real* o *flor imperial* ('royal flush' en inglés): cinco cartas consecutivas del mismo palo del 10 al as.

    (b) *Escalera de color* ('straight flush'): cinco cartas consecutivas del mismo palo, en donde el as podemos contarlo, ya sea como la carta más alta (después del rey) o más baja (como uno).

    (c) *Póquer* ('four of a kind'): cuatro cartas del mismo valor más una quinta carta.

    (d) *'Full house'* (tercia y par): tres cartas del mismo valor y dos de otro valor.

    (e) *Color* ('flush'): cinco cartas del mismo palo.

    (f) *Escalera* ('straight'): cinco cartas consecutivas, no necesariamente del mismo palo.

    (g) *Tercia* ('three of a kind'): tres cartas del mismo valor y dos cartas más, pero que no forman 'full house' ni póquer.

    (h) *Doble par* ('two pair' o 'pocket'): dos pares del mismo valor cada uno.

    (i) *Par* ('one pair'): dos cartas del mismo valor.

    (j) *Flor silvestre* ('royal sampler'): cualquier otra mano de póquer diferente a las anteriores que tenga Homero J. Simpson.

14. Calcula la probabilidad asociada con cada mano de póquer del problema anterior.

15. En una lotería, se seleccionan aleatoriamente seis números diferentes del conjunto $\{1, 2, \ldots, 50\}$ y se los llama *números ganadores*. Un jugador elige previamente seis números, deseando elegir tantos números ganadores como sea posible. Encuentra la probabilidad de que el jugador elija exactamente k números ganadores, con k desde cero hasta seis, inclusive.

16. De una baraja francesa, elegimos trece cartas. Determina la probablidad de que incluyamos al menos tres cartas de cada palo.

17. ¿Cuántas palabras de las contadas en el problema 12 no contienen dos A consecutivas?

18. Encuentra el número de formas de elegir diez letras diferentes del alfabeto usual $\{A, B, C, \ldots, Z\}$ si no podemos elegir dos letras consecutivas.

19. Elegimos aleatoriamente cuatro dígitos diferentes del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Encuentra la probabilidad de que nuestra elección incluya dos dígitos consecutivos.

20. Encuentra el número de combinaciones de diez letras (permitiendo repeticiones) del conjunto $\{A, B, C\}$ que contengan:

    (a) al menos una letra de cada una,

    (b) al menos dos de cada letra,

    (c) al menos una A, dos B y tres C,

    (d) cualquier número de cada letra y

    (e) al menos una A y dos B.

21. Encuentra el número de combinaciones de cincuenta dígito del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en las que cada dígito i en el conjunto aparezca al menos i veces en la combinación.

22. (a) Compara los valores de $\binom{100}{200}_R$ y $\binom{200}{100}_R$, ¿cuál es mayor?

    (b) Responde la misma pregunta para $\binom{101}{200}_R$ y $\binom{201}{100}_R$

23. Utiliza los reordenamientos de m ceros y n unos para dar una explicación combinatoria para la relación
$$\binom{m+1}{n}_R = \binom{m+n}{n}.$$

24. (a) Encuentra el número de formas de ordenar m perros y n gatos en una fila, de forma tal que los gatos estén separados entre sí. (Verifica tu resultado para el caso $n = 1$, debe darte $(m+1)!$).

    (b) Si ordenamos al azar m perros y n gatos en una fila, encuentra la probabilidad de que los gatos estén todos separados entre sí.

25. (a) Encuentra el número de formas de sentar m perros y n gatos alrededor de una mesa redonda, tales que los gastos estén todos separados entre sí. (Verifica tu resultado para el caso $n = 1$, debe darte $m!$).

    (b) Si m perros y n gatos se sientan al azar alrededor de una mesa redonda, encuentra la probabilidad de que todos los gatos estén separados entre sí.

26. (a) Si elegimos un orden circular de ceros y unos de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que los unos estén separados etnre sí?

    (b) Compara la respuesta que hallaste en el inciso (a) con el inciso (b) del problema anterior en el caso $m = n = 2$. ¿Deberían ser el mismo? ¿Qué está pasando?