Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas
Cuarta tarea

Trimestre 2018O
29 de octubre de 2018

Nombre: ______________________
Matrícula: ______________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Argumenta tus respuestas.

1. Encuentra el número de sucesiones A-dominadas que consten de once A y cinco B.

2. Supón que m ceros y n unos se ordenan de forma aleatoria, donde todo orden tiene la misma probabilidad. Muestra que la probabilidad de que la sucesión resultante sea 0-dominada es $1 - \frac{n}{m+1}$.

3. ¿Cuántos ceros y cuántos unos debemos incluir en una cadena de bits de longitud diez para maximizar el número de reórdenes 0-dominados de la cadena?

4. Encuentra la fórmula para el número de sucesiones 0-dominadas de ceros y unos que tienen una longitud dada L. (La fórmula debe depender de L solamente, no del número de ceros y unos en la sucesión).

5. Se hace una elección entre dos candidatos. El candidato A gana con una votación de 1032 frente a 971. Si contamos los votos uno a la vez y en un orden aleatorio, determina la probabilidad de que el candidato ganador nunca esté perdiendo en cualquier punto del conteo.

6. Separamos los enteros 1, 2, 3, ..., 10 de forma aleatoria en dos conjuntos de cinco números cada uno y los acomodamos en dos filas, de forma tal que los números en cada filas aparezcan de forma creciente, es decir,

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & a_4 & < & a_5 \\ b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & b_4 & < & b_5 \end{array}$$

Encuentra la probabilidad de que todo número en la segunda fila sea mayor que el número que está exactamente sobre él. (*Sugerencia.* Cada arreglo de números en dos columnas se corresponde con una sucesión de A y B. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 10 \end{array}$$

se corresponde con la ecuación $AABABBBAAB$. ¿Cuál es la conexión y qué propiedad queremos que tenga la sucesión?).

7. (a) Encuentra x y y tales que

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{x}{y},$$

al analizar ejemplos en el triángulo de Pascal (x y y dependen de k y n).

(b) Encuentra la explicación combinatoria del resultado anterior.

8. (a) Muestra que $m^2 = m + 2\binom{m}{2}$ para todos los enteros positivos m. (Observa que $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$ y, así, $\binom{1}{2} = 0$).

(b) Utiliza el inciso anterior y el problema 7 para obtener una fórmula para

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2.$$

(c) Utiliza el método usado en el problema anterior para obtener una fórmula para

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{m=1}^{n} m^3.$$

9. Prueba que si n es un número primo y $1 \leq k < n$ entonces $\binom{n}{k}$ es divisible entre n.

10. Considera dos enteros primos relativos n y k, muestra lo siguiente.

(a) $\binom{n-1}{k-1}$ es divisible entre k. (*Sugerencia.* ¿Cuánto es $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$?).

(b) $\binom{n}{k}$ es divisible entre n.

(c) $\binom{n}{k}_R$ es divisible entre n.

11. Muestra que $\binom{2n}{n}$ es divisible entre $n+1$.

12. (a) Prueba algebraicamente que para cualesquiera enteros no-negativos $n \geq m \geq k$, se tiene que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

(b) Encuentra una explicación combinatoria al resultado anterior.

13. Usa el problema anterior para evaluar las sumas siguientes.

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{20} \binom{50}{i}\binom{50-i}{20-i}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{20} (-1)^i \binom{50}{i}\binom{50-i}{20-i}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=20}^{50} \binom{50}{i}\binom{i}{20}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=20}^{50} (-1)^i \binom{50}{i}\binom{i}{20}$

14. Justifica la fórmula

$$\binom{100}{1} + 2\binom{100}{2} + 3\binom{100}{3} + \cdots + 100\binom{100}{100} = 100(2^{99})$$

de tres formas diferentes:

(a) Al usar la propiedad de simetría $\binom{100}{k} = \binom{100}{100-k}$.

(b) Al usar que $\binom{100}{k} = \frac{100}{k}\binom{99}{k-1}$ para $k \geq 1$.

(c) Al derivar la expansión de $(1+x)^{100}$.

15. Evalúa la suma

$$\binom{100}{0} + \frac{1}{2}\binom{100}{1} + \frac{1}{3}\binom{100}{2} + \cdots + \frac{1}{101}\binom{100}{100}.$$