A través de las gráficas:
Una introducción a la Teoría de las Gráficas
con énfasis en la inducción

Ilán A. Goldfeder

Versión 0.5.25 del 29 de noviembre de 2018

Advertencia

El presente texto es un avance de un futuro libro de texto introductorio de Teoría de las Gráficas. Lo empecé a principios del año 2016 y constantemente lo voy actualizando. Pero, dado que no está terminado, hay muchos cabos sueltos y posibles errores. Si sospechan de alguno o tiene alguna sugerencia —o queja—, estoy disponible en el correo `ilangoldfeder` *(arroba)* `gmail`*(punto)* `com`.

Índice

List of Theorems

Capítulo 1

Preliminares

Aspiro a que el presente texto sirva como para un curso introductorio de Teoría de las Gráficas (como puede ser la materia «Gráficas y Juegos» en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México), es decir, de los primeros semestres de carreras como matemáticas, ciencias de la computación y afines. La Teoría de las Gráficas tiene la cualidad de que podemos desarrollarla desde elementos muy básicos y al alcance de cualquier estudiante de los primeros semestres: nociones de conjuntos, funciones, relaciones, etc. Sin embargo, para las pruebas en muchos casos será necesario —y conveniente— hacer uso de las pruebas por inducción. Éste puede ser el principal obstáculo —y, a la vez, la principal aportación— de este texto.

1.1 Algunos prerrequisitos

La unidad fundamental sobre la que se han construido la mayor parte de las matemáticas son los *conjuntos*. Resulta imposible definir *qué* es un conjunto pero lo que sí sabemos es cual es la propiedad fundamental de los conjuntos:

> Si A es un conjunto, para cualquier 'elemento' x sabemos si x está o no está en A. En notación matemática, siempre sabemos si $x \in A$ o si $x \notin A$ (pero no puedes ser ambas verdaderas o ambas falsas).

Usualmente usamos letras mayúsculas como A, B, etc. para denotar conjuntos y letras minúsculas como a, b, etc. para denotar sus elementos[1].

[1] Pero esta distinción, como verán en un futuro —pero ciertamente no aquí—, es ficticia.

Algunos conjuntos que resultan relevantes para nosotros son los siguientes:

1. El conjunto de los *números naturales* sin el cero, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, \}$.

2. El conjunto de los *números naturales* con el cero[2], $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots, \}$.

3. El conjunto de los *números enteros*, $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \}$.

4. El conjunto de los *números racionales*, $\mathbb{Q} = \{p/q \colon p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\}$.

1.1.1 La igualdad de conjuntos

En conjuntos, resulta importante saber cuando dos conjuntos que nos dan, digamos A y B son *iguales*, lo cual denotamos por

$$A = B.$$

Definición 1. Dos conjuntos A y B son *iguales* si todos los elementos de A también son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A. Es decir,

(i) para todo $x \in A$ entonces $x \in B$ y

(ii) para todo $y \in B$ entonces $y \in A$.

¿Cuándo dos conjuntos no son iguales? Cuando no se cumple la definición, es decir, no se cumple (i) **o** no se cumple (ii), es decir, dos conjuntos A y B *no son iguales* si

(i) existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ o

(ii) existe $y \in B$ tal que $y \notin A$.

[2]**¿El cero es o no un número natural?** Depende de a quién le pregunten. La consideración más importante en el resto del texto para trabajar con $\mathbb{N}$ o $\mathbb{N}_0$ es en lo que estemos trabajando y cuál conjunto simplifica las cosas.

1.1.2 Los subconjuntos

Dados dos conjuntos A y B, el conjunto A es *subconjunto* del conjunto B y lo denotamos como $A \subseteq B$ si todo elemento de A también es elemento de B, es decir, si para todo $x \in A$ entonces $x \in B$. De forma similar, A ***no*** *es subconjunto* de B si existe un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$. Lo denotamos por $A \nsubseteq B$.

Notemos que para cualquier conjuntos A, el conjunto A siempre es subconjunto del conjunto A (es decir, $A \subseteq A$). Cuando B es subconjunto de A y B es diferente de A decimos que B es un *subconjunto propio* de A y lo denotamos por $B \subsetneq A$.

Con esto, tenemos el siguiente resultado básico que será de ayuda para escribir algunas pruebas.

Proposición 2. *Dados dos conjuntos A y B, los conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

1.1.3 El conjunto vacío

El conjunto vacío, que denotamos por $\emptyset$, es uno de los más importantes, cumple que para todo x,

$$x \notin \emptyset.$$

Teorema 3 (Unicidad del conjunto vacío)**.** *El conjunto vacío es único.*

Demostración. Supongamos que existe otro conjunto que cumple las mismas características que el conjunto vacío, llamémosle W. Queremos probar que $W = \emptyset$, por §§ 1.1.1 y 1.1.2 debemos probar que $\emptyset \subseteq W$ y que $W \subseteq \emptyset$.

Probemos primero que $\emptyset \subseteq W$. Debemos mostrar que todo elemento en $\emptyset$ también es elemento de W pero, dado que por definición $\emptyset$ no tiene elementos, ya acabamos.

Por otro lado, debemos probar que $W \subseteq \emptyset$. Mostraremos que todo elemento en W también es elemento de $\emptyset$ pero, dado que supusimos que W no tenía elementos, ya terminamos.

Por lo tanto, $\emptyset = W$. Ya que W lo elegimos de forma arbitraria, hemos mostrado que cualquier conjunto sin elementos es igual al vacío, es decir, el conjunto vacío es único. $\square$

1.1.4 Operaciones de conjuntos

Dados dos conjuntos, existen dos operaciones básicas entre ellos: la unión y la intersección.

Definición 4 (Unión de conjuntos)**.** Consideremos dos conjuntos A y B. La *unión* de A y B y que denotamos por $A \cup B$ es el conjunto

$$\{x\colon x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

1.2 El principio del buen orden

Principio 5 (Principio del buen orden)**.** *Todo subconjunto* ***no vacío*** *de números naturales posee un mínimo (es decir, un elemento que es menor o igual que los demás).*

Capítulo 2

Introducción

2.1 Nuestras primeras fuentes de inspiración

Aunque las gráficas existen desde mucho tiempo antes que *Facebook* y *Twitter*, estas redes sociales son muy buenos ejemplos para darnos una idea de qué es una gráfica y qué es una digráfica.

Pensemos primero en Facebook: ¿qué es lo importante en Facebook? En principio, l-s usuari-s y, su característica principal, saber cuando dos usuari-s son o no amig-s. ¿Cómo podríamos representar gráficamente al menos una parte de Facebook? Si lo hiciéramos en una hoja de papel (obviamente no dibujaremos toda la red), a cada usuari- le podríamos representar por medio de un punto y:

- si dos usuari-s son amig-s entonces dibujamos una línea entre los puntos que l-s representan y
- si dos usuari-s no son amig-s entonces no dibujamos una línea entre los puntos que l-s representan.

Al dibujo que nos queda es que lo llamaremos una **gráfica**.

Ahora pensemos en Twitter: ¿qué es lo importante en Twitter? En principio, l-s usuari-s y, su característica principal, saber cuando un usuari- sigue a otr-. De igual manera, podemos representar gráficamente (una parte de) Twitter donde a cada usuari- le representemos por medio de un punto y, si A y B son dos usuari-s y A sigue a B entonces dibujaremos una flecha que vaya de A a B. Al dibujo que nos queda es lo que llamaremos una **digráfica**.

En el presente texto sólo trabajaremos con gráficas y, de hecho, con gráficas que se parecen mucho a la de Facebook.

2.2 La definición de gráfica

Nuestra primera definición (y la más básica del curso) es:

Definición 6. Una *gráfica* G es un par ordenado $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío[1], a cuyos elementos llamamos los *vértices* de la gráfica, y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices, cuyos elementos son las *aristas* de la gráfica.

El desarrollo de toda nueva teoría es como empezar una novela, los principios suelen ser un tanto tediosos porque tanto el matemático como el novelista tienen dar cuenta de los personajes y el contexto en el que se desarrollará la novela. La gráfica es nuestra protagonista.

Una gráfica puede o no tener aristas, el vacío ciertamente es un conjunto de pares no ordenados de vértices **porque no podemos exhibir un elemento en $A(G)$ que *no sea* un par no ordenado de vértices** (éste es un argumento por *vacuidad*).

Tomemos una gráfica cualquiera $G = (V(G), A(G))$. Si u y v son dos vértices de G —es decir, si u y v están en $V(G)$— y $\{u, v\}$ está en $A(G)$, diremos que u y v son *adyacentes*. Ya que escribir $\{u, v\} \in A(G)$ puede resultar un tanto tedioso cuando se trabaja con muchas aristas, diremos indistintamente que $uv \in A(G)$ o que $vu \in A(G)$.

La **relación de ser adyacentes** o **de adyacencia** es la más importante dentro de la teoría de las gráficas y a causa de ello tenemos muchas formas de decir que dos vértices son adyacentes.

Si $\{u, v\}$ es una arista de G —es decir, $\{u, v\}$ está en $A(G)$ y esto implica que u y v tienen que ser vértices de G—, diremos que u es *vecino* de v y que v es *vecino* de u. Más aún, u y v son los extremos de la arista $\{u, v\}$.

Nuestra gráficas pueden venir de muchos lados y las aristas pueden representar cosas distintas —como en Facebook, en el que las aristas representan que dos vértices son amigos— pero cuando estemos en el contexto de la teoría de las gráficas, nos referiremos de forma general como la relación de adyacencia.

Las gráficas se pueden dibujar y ésta es una de las propiedades cruciales de ellas (tanto así que las llamamos *gráficas*). Para la mayor parte de las subáreas de la Teoría de las Gráficas no nos importa como dibujemos las gráficas (pero en algunas sí importa). Sin embargo, un buen dibujo puede facilitarnos la tarea de entender o resolver un problema.

[1] ?Qué va aquí?

Dos aristas que se crucen no forman ni dan lugar a un vértice.

Hay muchas formas de dibujar gráficas y de dibujar aristas.

Muchas veces, que se nos ocurra una solución a un problema o como dar una prueba dependerá de que hagamos un dibujo apropiado de la gráfica.

2.3 Los grados de los vértices

Consideremos una gráfica G de orden n. Dado un vértice u en G, la *vecindad* de u es el conjunto de todos los vecinos de v y la denotamos por $N_G(u)$. El número de vecinos de u es el *grado* de u y lo denotamos por $\mathrm{d}_G(u)$.

¿Qué tan grande o tan chico puede ser el grado de un vértice? Para cualquier vértice v, podría pasar que v no tenga vecinos o podría pasar que el **resto** de los vértices de G sean sus vecinos. Recordemos que v no puede ser vecino de sí mismo. Así, tenemos que

$$0 \leq d_G(v) \leq n-1.$$

Cuando $d_G(v) = 0$ decimos que v es un vértice *aislado*.

2.3.1 La suma de los grados

Si e es una arista de G, sabemos que existen dos vértices x y y tales que

$$e = xy.$$

Ya que y es un vecino de x, el vértice y contriuye en una unidad en el grado de x y, de la misma forma, el vértice x contribuye en una unidad en el grado de y. Es decir, **cada arista e contribuye en una unidad en el grado de cada uno de sus extremos, que son dos**. Por tanto, si sumamos los grados de todos los vértices, estaremos considerando cada arista dos veces. Si $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y m es el tamaño de G, tendríamos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = d_G(v_1) + d_G(v_2) + \cdots + d_G(v_n) = 2m.$$

Enunciémoslo y probémoslo formalmente.

Teorema 7. *Si G es una gráfica de orden n y tamaño m con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ entonces*

$$d_G(v_1) + d_G(v_2) + \cdots + d_G(v_n) = 2m.$$

Demostración. Consideremos una gráfica G de orden n, con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, y tamaño m. Haremos la prueba por inducción sobre m, el tamaño de G.

Caso base. Cuando $m = 0$, G no tendrá ninguna arista. Por lo tanto, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que $d_G(v_i) = 0$.

Cuando $m = 1$, G tiene exactamente una arista. Por lo tanto, existirán exactamente dos vértices cuyo grado sea uno y el resto tendrán grado cero. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 1$ y $d_G(v_i)$, para todo $i \in \{3, 4, \ldots, n\}$. Así, tenemos que

$$1 + 1 + 0 + \cdots + 0 = 2 = 2m.$$

Hipótesis de inducción. Fijemos dos naturales n y m, con $1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ y supongamos que para toda gráfica G' de orden n, con $V(G') = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, y tamaño m' con $m' < m$ tenemos que

$$d_{G'}(v_1) + d_{G'}(v_2) + \cdots + d_{G'}(v_n) = 2m'.$$

Paso inductivo. Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m. Ya que $m > 1$, tenemos que $|A(G)| \neq \emptyset$. Así, tomemos una arista $e \in A(G)$. Sin *pérdida de generalidad* podemos suponer que $e = v_1 v_2$[2] Construiremos una nueva gráfica G que satisfaga nuestra hipótesis de inducción con $V(G') = V(G)$ y $A(G') = A(G) \setminus \{e\}$.

Notemos que el orden de G' es n y su tamaño $m' = m - 1$. Ya que la única diferencia entre G y G' es la arista e, los únicos vértices que cambian de grado son v_1 y v_2. Así, tenemos que

$$d_{G'}(v_1) = d_G(v_1) - 1,$$

$$d_{G'}(v_2) = d_G(v_2) - 1,$$

$$d_{G'}(v_i) = d_G(v_i) \text{ para todo } i \in \{3, 4, \ldots, n\}.$$

Por hipótesis de inducción y al substituir las equivalencias previas, tene-

[2] Aquí, *sin pérdida de generalidad* significa que podemos renombrar los vértices. Es decir, sabemos que $e = v_i v_j$ y siempre podemos intercambiar las etiquetas de v_1 y v_i así como de v_2 y v_j.

mos que

$$
\begin{array}{rcrcl}
d_{G'}(v_1) + d_{G'}(v_2) & + & d_{G'}(v_3) + \cdots + d_{G'}(v_n) & & = 2m' \\
(d_G(v_1) - 1) + (d_G(v_2) - 1) & + & d_G(v_3) + \cdots + d_G(v_n) & & = 2m' \\
d_G(v_1) + d_G(v_2) & + & d_G(v_3) + \cdots + d_G(v_n) & -2 & = 2m' \\
d_G(v_1) + d_G(v_2) & + & d_G(v_3) + \cdots + d_G(v_n) & & = 2m' + 2 \\
d_G(v_1) + d_G(v_2) & + & d_G(v_3) + \cdots + d_G(v_n) & & = 2(m' + 1) \\
d_G(v_1) + d_G(v_2) & + & d_G(v_3) + \cdots + d_G(v_n) & & = 2m.
\end{array}
$$

□

Como consecuencia de este teorema obtendremos un resultado sobre el número de vértices de grado par e impar en una gráfica. A veces, en vez de decir vértices de grado par, sólo diremos *vértices pares* y lo mismo para los impares. Dada una gráfica $G = (V(G), A(G))$, definamos:

$$V_1 = \{v\colon \mathrm{d}_G(v) \text{ es impar}\}$$

y

$$V_2 = \{v\colon \mathrm{d}_G(v) \text{ es par}\}.$$

Claramente, $V_1 \cup V_2 = V(G)$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sabemos que

Proposición 8 (Suma de enteros impares)**.** *Dada una lista de números enteros impares a_1, a_2, ..., a_p, la suma*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$

es impar si y sólo si p es par.

Por otro lado, en el caso de los números enteros pares la situación es mucho más simple.

Proposición 9. *Dada una lista de número enteros pares b_1, b_2, ..., b_q, siempre se tiene que su suma*

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_q$$

es un entero par.

Y así tenemos que

Corolario 10 (Número de vértices de grado impar)**.** *El número de vértices de grado impar es par.*

Para la prueba basta con partir los vértices en dos conjuntos y utilizar el teorema 7.

2.3.2 Grados mínimos y máximos

Dada una gráfica $G = V(G),\ A(G))$ con $V(G) = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$, sabemos que el conjunto

$$\{\mathrm{d}_G(v_1), \mathrm{d}_G(v_2), \ldots, \mathrm{d}_G(v_n)\}$$

es un subconjunto de los números naturales. El *grado mínimo* de G es el menor de los grados de entre todos sus vértices y lo denotamos por $\delta(G)$ y el *grado máximo* de G es el mayor de los grados de entre todos sus vértices y lo denotamos por $\Delta(G)$. Es decir,

$$\delta(G) = \mathrm{mín}\{\mathrm{d}_G(v_1), \mathrm{d}_G(v_2), \ldots, \mathrm{d}_G(v_n)\}$$

y

$$\Delta(G) = \mathrm{máx}\{\mathrm{d}_G(v_1), \mathrm{d}_G(v_2), \ldots, \mathrm{d}_G(v_n)\}.$$

2.3.3 El principio del palomar

Imaginemos que tenemos ciento y un palomas y cien pichoneras. Si acomodamos —como sea que queramos— las ciento y un palomas dentro de las cien pichoneras, nos encontraremos con que en al menos una de las pichoneras hay al menos dos palomas.

Lo anterior parece cierto pero la cuestión sería ¿cómo lo probamos? Tenemos dos conjuntos, C el de las palomas y P el de las pichoneras. Ya que estamos poniendo a cada paloma en una pichonera, tenemos una función

$$f\colon C \to P.$$

Lo que queremos mostrar es que hay dos palomas que quedan en la misma pichonera, es decir, a y b en C tales que

$$f(a) = f(b).$$

Es decir, queremos mostrar que la función f no es inyectiva.

Sin embargo, es claro que la función f no puede ser inyectiva. Para ello, debemos recordar una propiedad de las funciones inyectivas. Consideremos una función

$$g\colon A \to B.$$

Si g es una función inyectiva entonces

$$|A| \leq |B|.$$

La forma contrapositiva diría que si $|A| > |B|$ entonces g no es un función inyectiva.

De las hipótesis de nuestro problema, se sigue que la función f no es inyectiva y, por lo tanto, dos palomas quedan en la misma pichonera. Así, tenemos que

Teorema 11 (Principio de la pichonera)**.** *Consideremos dos enteros n y k tales que $n > k$. Si tenemos una colección de n objetos y formamos k conjuntos, en uno de esos conjuntos habrán al menos dos objetos.*

2.3.4 Toda gráfica no trivial tiene dos vértices con el mismo grado

Definición 12 (Gráfica irregular)**.** Dada una gráfica G, diremos que G es *irregular* si sus vértices tienen grados distintos.

La gráfica que consta de un solo vértice y tiene tamaño cero es irregular (por **vacuidad**, ya que no podríamos demostrar que **no es** irregular). Dicha gráfica es la gráfica *trivial*. De orden dos podemos pensar en la gráfica que no tiene arista y la que tiene arista; en la primera sus dos vértices tienen grado cero y en la segunda sus dos vértices tienen grado uno, por lo cual ninguna es irregular. ¿Qué pasa en el caso en que las gráfica que tengan tres vértices? Si la gráfica no tuviese aristas, todos sus vértices tendrían grado cero. Si la gráfica tuviese una sola arista, tendríamos dos vértices de grado uno y uno de grado cero. Si la gráfica tuviese dos aristas, tendríamos dos vértices de grado uno y uno de grado dos. Y si tuviese tres aristas, tendría tres vértices de grado dos. En los cuatro casos las gráficas poseen dos vértices que tienen el mismo grado. ¿Pasará en general?

Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m con conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Como ya mencionamos arriba, el menor y el mayor valor que pueden alcanzar el grado son cero y $n-1$, respectivamente. Es decir, $0 \leq d_G(u) \leq n-1$. Pero $d_G(u)$ podría tomar cualquier valor en

$$\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

y notemos que en ese conjunto hay n posibles valores, para n posibles vértices. En principio, cada vértice podría tener un grado diferente.

Pero falta un detalle, ¿qué pasa si en la gráfica hay un vértice de grado $n-1$, digamos v_i? Ya que v_i tiene que ser adyacente al resto de los vértices, ningún vértice de los que sobran pueden tener grado cero. Es decir,

$$\mathrm{d}_G(v_j) \geq 1$$

para todo j en $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Esto implica que en este caso, los grados sólo pueden tomar valores en el conjunto

$$\{1, 2, \ldots, n-1\},$$

que tiene tan sólo $n-1$ elementos. Por el principio del palomar, existen dos vértices v_p y v_q tales que

$$\mathrm{d}_G(v_p) = \mathrm{d}_G(v_q).$$

Ahora supongamos que la gráfica no tiene vértices de grado $n-1$, es decir, para todo i en $\{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que $\mathrm{d}_G(d_i)$ está en el conjunto

$$\{0, 1, \ldots, n-2\},$$

que tiene $n-1$ elementos. Por el principio del palomar, existen dos vértices v_p y v_q tales que

$$\mathrm{d}_G(v_p) = \mathrm{d}_G(v_q).$$

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 13. *La única gráfica irregular es la trivial.*

Dicho de otra forma,

Proposición 14. *Toda gráfica no-trivial posee al menos dos vértices que tienen el mismo grado.*

2.4 Subgráficas

En matemáticas, cuando definimos un objeto usualmente también definimos objetos del mismo tipo que viven dentro de él. Dadas dos gráficas $H = (V(H), A(H))$ y $G = (V(G), A(G))$, decimos que H es *subgráfica* de G, y lo denotamos por $H \leq G$, si

- $V(H) \subseteq V(G)$ y
- $A(H) \subseteq A(G)$.

2.4.1 Ejemplos

Si G es una gráfica, claramente G es subgráfica de G. Para cualquier vértice u en G, la gráfica $(\{u\}, \emptyset)$ es subgráfica de G. Si e es una arista de G, sabemos que existen dos vértices x y y en G tales que $e = xy$, tenemos que la gráfica $(\{x, y\}, \{e\})$ es una subgráfica de G.

2.4.2 Subgráficas inducidas

Tomemos una gráfica $G = (V(G), A(G))$. Algunas veces tendremos que prestar atención a un subconjunto de $V(G)$ en particular, llamémosle S. ¿Existen subgráficas H de G que cumplan que $V(H) = S$? Sí, en particular aquella que no tiene aristas, es decir, $H' = (S, \emptyset)$. Es fácil checar que H' es subgráfica de G y que $V(H') = S$.

Ahora, de entre todas las subgráficas H de G con $V(H) = S$, ¿cuál es la que más se parece a G? La que tiene todas las aristas posibles (las cuales dependen de G). La *subgráfica inducida* por S en G, que denotamos por $G[S]$, tiene por vértices el conjunto S y dados dos vértices u y v en S, la arista uv está en $A(G[S])$ si y sólo si uv está en $A(G)$.

A veces puede que no sepamos quién es S pero si que estamos hablando de una subgráfica inducida. Dada una subgráfica H de G, diremos que H es *inducida* si existe un subconjunto C de $V(G)$ tal que

$$H \cong G[S].$$

2.4.3 Eliminación de vértices

Dada una gráfica G y un subconjunto S de $V(G)$, la gráfica $G - S$ se define como

- $V(G - S) = V(G) \setminus S$ y
- $A(G - S) = A(G) \setminus \{e \colon e \in A(G) \text{ y } e \text{ tiene al menos un extremo en } S\}$.

Notemos que $A(G - S) = A(G) \setminus \{a \colon a \subseteq S \text{ y } |a| = 2\}$.

Cuando S es un conjunto unitario, es decir, si existe un vértice v tal que $S = \{v\}$ entonces usualmente escribiremos $G - v$ en vez de $G - S$ o $G - \{v\}$.

Proposición 15 (Subgráficas inducidas y eliminación de vértices). *Si G es una gráfica y $S \subseteq V(G)$ entonces*

$$G - S = G[V(G) \setminus S].$$

2.4.4 Subgráficas generadoras

Si H es subgráfica G, diremos que H es una *subgráfica generadora* de G si

$$V(H) = V(G).$$

2.5 Isomorfismos

Introducimos nuevos objetos matemáticos porque nos interesa estudiar ciertas propiedades en particular. En el caso de las gráficas, esta propiedad es la adyacencia. Pero también tenemos que decir cuando a dos de estos objetos los vamos a considerar de cierta forma *iguales* con respecto a lo que queremos estudiar.

Por ejemplo, las gráficas $G_1 = (\{x\}, \emptyset)$ y $G_2 = (\{y\}, \emptyset)$ son diferentes (si suponemos que $x \neq y$) pero dan lugar a dibujos muy parecidos: ambos se pueden representar con sólo un vértice y sin aristas. Podemos pensar en las gráficas $G_3 = (\{u, v\}, \{\{u, v\})$ y $G_4 = (\{w, z\}, \{\{w, z\})$. Si las dibujamos, en ambos casos tendremos dos vértices unidos por una arista.

En ambos casos, para la Teoría de las Gráficas las gráficas G_1 y G_2 así como G_3 y G_4 se *portan igual*; formalmente diremos que son *isomorfas*.

¿Qué características tendrían dos gráficas para que, desde la Teoría de las Gráficas, las consideremos iguales?

- Por un lado, nos gustaría que sus conjuntos de vértices fueran iguales *como vértices*.
- Por otro, que las adyacencias sean las *mismas*.

Para que los conjuntos de vértices de dos gráficas sean *iguales* (no como conjuntos, sino como vértices) al dibujar ambos, tendríamos que poder pasar de uno a otro, es decir, identificar cada vértice de la primera gráfica con su vértice correspondiente en la segunda gráfica. Es decir, necesitamos una función de un conjunto que en el otro que sea biyectiva. Y para que las adyacencias sean las mismas, si dos vértices en una gráfica son adyacentes, sus imágenes en la otra gráfica también deben ser adyacentes. Pero no nos gustaría que aparecieran más adyacencias en la segunda gráfica, es decir, si dos vértices no son adyacentes en la primera gráfica, sus imágenes tampoco deben ser adyacentes.

Definición 16. Dadas dos gráficas $G = (V(G), A(G))$ y $H = (V(H), A(H))$, diremos que G es *isomorfa* a H si existe una función **biyectiva**

$$\phi\colon V(G) \to V(H)$$

que cumpla las siguientes propiedades
i. si $\{u, v\} \in A(G)$ entonces $\{\phi(u), \phi(v)\} \in A(H)$
ii. si $\{u, v\} \notin A(G)$ entonces $\{\phi(u), \phi(v)\} \notin A(H)$.

Las propiedades que pedimos que cumpla la función biyectiva son **equivalentes** a pedir que:

$$\{u, v\} \in A(G) \text{ si y sólo si} \{\phi(u), \phi(v)\} \in A(H).$$

1. Para probar que dos gráficas G y H **son isomoformas** basta con dar la función biyectica y comprobar que efectivamente cumple las condiciones anteriores.

2. Probar que dos gráficas G y H **no son isomoformas** es bastante más complicado, en teoría tendríamos que verificar que **toda** función biyectiva de G a H falla en cumplir alguna de las condiciones anteriores.

Si G y H son dos gráficas de orden seis, existen 6! funciones biyectivas entre sus vértices[3] (es decir, 720 funciones) y tendríamos que revisar que **todas** fallan. Imagínense para gráficas con cientos o miles de vértices.

Sin embargo, tenemos otros caminos, más fáciles, para asegurar que dos gráficas no son isomoformas. Para ello, en principio, debemos dar propiedades que sí cumplen gráficas que son isomorfas.

2.5.1 Algunas propiedades de los isomorfismos

Proposición 17. *Si G y H son dos gráficas isomorfas entonces:*
i. G y H tienen el mismo orden.
ii. G y H tienen el mismo tamaño.
iii. G posee un triángulo[4] si y sólo si H posee un triángulo.

[3] Al primer elemento de G lo podemos mandar a alguno de los seis vértices de H. Para el segundo, nos quedan cinco opciones y así seguimos.

[4] Un triángulo es lo que un- puede esperar que sea un triángulo: tres vértices u, v y w tales que u y v son adyacentes, v y w son adyacentes y w y u son adyacentes, para abreviarlo, son tres vértices que son mutuamente adyacentes.

iv. Para todo entero no-negativo k, existe un vértice u en G de grado k si y sólo si existe un vértice u' en H de grado k.

Si G y H son gráficas isomorfas, lo denotaremos como $G \cong H$.

Demostración. Ya que G y H son isomorfas, *por definición* sabemos que existe una función biyectiva

$$\phi \colon V(G) \to V(H)$$

que satisface que:

- si u y v son dos vértices de G adyacentes en G entonces sus imágenes, $\phi(u)$ y $\phi(v)$, son adyacentes en H y
- si x y y son dos vértices de G que no son adyacentes en G entonces sus imágenes, $\phi(u)$ y $\phi(v)$, no son adyacentes en H.

Probemos primero i. Ya que la función ϕ es biyectiva, se sigue que $V(G)$ y $V(H)$ tienen la misma cardinalidad, es decir,

$$|V(G)| = |V(H)|.$$

Ya que el orden de G se define como la cardinalidad de $V(G)$ y el orden de H se define como la cardinalidad de H, se sigue que G y H tienen el mismo orden, que es lo que se afirmaba.

Para probar el segundo inciso, podemos hacer algo parecido a lo anterior. Las funciones biyectivas nos permiten mostrar que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad Si encontramos una función biyectiva de $A(G)$ a $A(H)$, habremos terminado. Por otro lado, de la definición de isomorfismo se sigue de manera natural la existencia de tal función.

$$A(G) \xrightarrow{\phi^*} A(H)$$

$$\{u, v\} \mapsto \{\phi(u), \phi(v)\}$$

La anterior sólo es una forma diferente de escribir la función $\phi^* \colon A(G) \to A(H)$ y la notación $\{u,\ v\} \mapsto \{\phi(u),\ \phi(v)\}$ significa simplemente $\phi^*(\{u,\ v\}) = \{\phi(u),\ \phi(v)\}$.

Ahora, para probar que efectivamente G y H tienen el mismo tamaño, debemos mostrar que la función ϕ^* es biyectiva (lo cual se seguirá de la definición de isomorfismo, que da las propiedades que satisface ϕ).

Primero veamos que ϕ^* es inyectiva[5]. Tomemos dos aristas $\{u, v\}$ y $\{x, y\}$ tales que
$$\{\phi(u), \phi(v)\} = \{\phi(x), \phi(y)\}.$$
Esto quiere decir que: (1) $\phi(u) = \phi(x)$ y $\phi(v) = \phi(y)$ o, al revés, (2) $\phi(u) = \phi(y)$ y $\phi(v) = \phi(x)$. Supongamos primero que $\phi(u) = \phi(x)$ y $\phi(v) = \phi(y)$. Como sabemos que ϕ es biyectiva, en particular es inyectiva. Por lo tanto, $u = x$ y $v = y$. De aquí que $\{u, v\} = \{x, y\}$. Análogamente, si suponemos que $\phi(u) = \phi(y)$ y $\phi(v) = \phi(x)$. Como sabemos que ϕ es biyectiva, en particular es inyectiva. Por lo tanto, $u = y$ y $v = x$. De aqcuí que $\{u, v\} = \{x, y\}$. Por lo anterior, la función ϕ^* es inyectiva.

Ahora probemos que la función ϕ^* es suprayectiva[6]. Tomemos una arista $\{x, y\}$ en $A(H)$. Ya que la función ϕ es biyectiva, en particular es suprayectiva, es decir, existen dos elementos u y v en $V(G)$ tales que $\phi(u) = x$ y $\phi(v) = y$. ¿Existe la arista $\{u, v\}$ en G? Procedamos por contradicción. Si $\{u, v\}$ no es una arista en G, de la definición de isomorfismo se sigue que $\{\phi(x), \phi(y)\} = \{x, y\}$ no es una arista en H, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{u, v\} \in A(G)$. Es decir, la función ϕ^* es suprayectiva.

Por lo tanto, la función ϕ^* es biyectiva y G y H tienen el mismo tamaño.

Para el inciso iii, basta con probar que si G posee un triángulo entonces H posee un triángulo. El regreso se sigue porque la relación *ser isomorfas* es simétrica. Supongamos, pues, que existen tres vértices diferentes u, v y w en $V(G)$ tales que $\{u, v\}$, $\{v, w\}$, $\{u, w\}$ están en $A(G)$. Ya que la función ϕ es biyectiva, tenemos que $\phi(u)$, $\phi(v)$ y $\phi(w)$ son tres vértices diferentes en $V(H)$. Por la definición de isomorfismo, tenemos que $\{\phi(u), \phi(v)\}$, $\{\phi(v), \phi(w)\}$ y $\{\phi(u), \phi(w)\}$ están en $A(H)$. Por lo tanto, H posee un triángulo.

Probemos ahora el inciso iv. Igual que en el caso anterior, ya que la relación de ser isomorfas es simétrica basta con probar la ida de la doble implicación. Supongamos que en G existe un vértice u de grado k, donde k es un entero no-negativo. Probaremos que en H existe un vértice de grado k. La elección de candidato debería de ser clara (ya que contamos con poca información): $\phi(u)$. Así queremos mostrar que $d_H(\phi(u)) = k$. Recordemos que por definición $d_H(\phi(u)) = |N_H(\phi(u))|$ y observemos que no sabemos cuánto vale $|N_H(\phi(u))|$. Mostraremos dos cosas:

[5]Una función $f\colon A \to B$ es *inyectiva* si para x y y en A se tiene que $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

[6]Una función $f\colon A \to B$ es *suprayectiva* si para todo y en B, existe un elemento x en A tal que $f(y) = x$.

- $|\{\phi(x) \colon x \in N_G(u)\}| = k$ y
- $N_H(\phi(u)) = \{\phi(x) \colon x \in N_G(u)\}$.

Lo primero se sigue de que ϕ es biyectiva. Para la segunda afirmación mostraremos las dos contenciones: $N_H(\phi(u)) \subseteq \{\phi(x) \colon x \in N_G(u)\}$ y $\{\phi(x) \colon x \in N_G(u)\} \subseteq N_H(\phi(u))$. Tomemos $y \in N_H(\phi(u))$, bastaría con probar que $\phi^{-1}(y)$ está en $N_G(u)$ (porque, en tal caso, $y = \phi(\phi^{-1}(y)) \in \{\phi(x) \colon x \in N_G(u)\}$). Es decir, debemos mostrar que u y $\phi^{-1}(y)$ son adyacentes; si no lo fuesen entonces, por la definición de isomorfismo, tendríamos que $\phi(u)$ y $y = \phi(\phi^{-1}(y))$ no serían adyacentes, lo cual es una contradicción. $\square$

2.6 Gráficas completas y gráficas vacías

Si consideramos una gráfica de orden uno (es decir, con sólo un vértice), a lo más puede tener cero aristas. Si tiene orden dos, puede tener cero o una arista. Si tiene orden tres, podría tener cero, una, dos y hasta tres aristas. ¿Cuántas podría tener si tiene orden cuatro?

¿Cuál es el mayor número de aristas que puede tener una gráfica de orden n? ¿Es un número finito o es infinito?

Recordemos que dada una gráfica G de orden n con $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, las aristas de G son parejas no ordenadas de vértices de G, es decir, subconjuntos de $V(G)$ de cardinalidad dos. Esto significa que $A(G)$ es un subconjunto del conjunto potencia de $V(G)$. Por lo tanto,

$$|A(G)| \leq |\mathcal{P}(V(G))| = 2^n.$$

De aquí sabemos que el número de aristas de una gráfica es finito. Ahora calculemos exactamente cuál es la cota superior.

Cada posible arista está formada por dos vértices distintos en $V(G)$. ¿De cuántas formas podemos escoger un primer vértice, digamos v_i? La i la escogemos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, que corresponden a los índices de nuestros n vértices. De aquí que elegimos de entre n opciones.

$$\{v_i, \_\}.$$

Para el segundo elemento debemos escoger otro vértice pero no puede ser el mismo v_i, ya que tendríamos una pareja de la forma $\{v_i, v_i\}$ pero en conjuntos no nos importan las repeticiones, es decir, $\{v_i, v_i\} = \{v_i\}$ y éste no es un subconjunto de $V(G)$ de cardinalidad dos. Así, tenemos que escoger un v_j con j en $\{1,\ 2,\ \ldots,\ i\} \setminus \{j\}$. De aquí que elegimos de entre $n-1$ opciones. Por lo tanto, las posibilidades para elegir $\{v_i,\ v_j\}$ son $n(n-1)$.

Notemos que, con el método anterior, para cualesquiera i y j en $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, con $i \neq j$, las parejas

$$\{v_i, v_j\}$$

y

$$\{v_j, v_i\}$$

son dos parejas que aparecen en momentos diferentes pero, como aristas, son la misma. Es decir, las estamos contando dos veces (como cuando sumamos los grados de todos los vértices). Por lo tanto, el número total de posibles subconjuntos de cardinalidad dos de $V(G)$ es

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Teorema 18. *Si G es una gráfica de orden n y tamaño m, se tiene que*

$$0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

El argumento anterior es, de hecho, una prueba de este teorema. También podemos dar la siguiente prueba.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre el orden, es decir, sobre el número de vértices de G.

Caso base. Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m. Si $n = 1$ entonces la gráfica no puede tener ninguna arista, es decir, $m = 0$. Por otro lado, tenemos que

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1(1-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Y ciertamente tenemos que

$$0 \leq m \leq 0,$$

con lo que queda el paso base.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para toda gráfica G' de orden n', con $n' < n$, y tamaño m' se satisface que

$$0 \leq m' \leq \frac{n'(n'-1)}{2}.$$

Paso inductivo. Consideremos una gráfica G de orden n, con $n \geq 2$, y tamaño m. Claramente tenemos que $m \geq 0$, por lo que sólo falta por probar la otra desigualdad. Tomemos un vértice x en G y definamos $G' = G - x$. El orden de G' es $n' = n - 1$ y su tamaño es $m' = m - \mathrm{d}_G(x)$. Por hipótesis inductiva, tenemos que

$$m' \leq \frac{n'(n'-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Además, sabemos que

$$m' = m - \mathrm{d}_G(x) \geq m - \Delta(G) \geq m - (n-1),$$

es decir,

$$m - (n-1) \leq m' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
$$m \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

Una gráfica de orden n es *completa* si cualquier par de vértices es adyacente y la solemos denotar por K_n. Por otro lado, una gráfica de orden n es *vacía*[7] si no posee aristas y la solemos denotar por $\overline{K_n}$.

Corolario 19 (Tamaño de las gráficas completas)**.** *Una gráfica de orden n y tamaño m es completa si y sólo si*

$$m = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Demostración. Primero probemos la ida, supongamos que G es una gráfica completa. Entonces para todo vértice v en G tenemos que

$$\mathrm{d}_G(v) = n - 1.$$

Por el teorema 7,

$$2m = \sum_{v \in V(G)} \mathrm{d}_G(v) = \sum_{v \in V(G)} (n-1) = n(n-1),$$

[7] El término puede resultar extraño ya que sí tiene vértices pero al menos era usado por Frank Harary, quien escribió uno de los libros de texto más conocidos sobre gráficas.

por lo tanto

$$m = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Para el regreso, supongamos que

$$m = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Supongamos que G no es completa, es decir, existen dos vértices v_i y v_j en $V(G)$ tales que $v_i v_j \notin A(G)$. Definamos la gráfica $G' = G + v_i v_j$. Así, tenemos que G' es una gráfica de orden $n' = n$ y de tamaño

$$m' = m + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

pero por el teorema 18, sabemos que

$$m' \leq \frac{n'(n'-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto G es una gráfica completa. $\square$

2.7 El complemento de una gráfica

Dada una gráfica $G = (V(G), A(G))$, el *complemento* de G, que se denota por $\overline{G}$, es la gráfica con conjunto de vértices $V(G)$, es decir $V(\overline{G}) = V(G)$, y dados dos vértices u y v en $V(\overline{G})$, la arista uv está en $A(\overline{G})$ si y sólo si la arista uv **no está** en $A(G)$.

Proposición 20. *Consideremos una gráfica G de orden n. Definamos las gráfica G' como:*

- $V(G') = V(G)$ *y*
- $A(G') = A(G) \cup A(\overline{G})$.

Se tiene que

$$G' \cong K_n.$$

2.8 Independencia

Dada una gráfica $G = (V(G), A(G))$, un subconjunto S de $V(G)$ es *independiente* si ningún pareja de vértices en S es adyacentes. Es decir, si $G[S]$ es una gráfica vacía. Por ejemplo, el vacío es un conjunto independiente. Más aún, para cada vértice u en $V(G)$, el conjunto unitario $\{u\}$ es independiente. La cardinalidad del conjunto independiente más grande es la *independencia* de G y se denota por $\alpha(G)$. Es decir,

$$\alpha(G) = \text{máx}\{|S| \colon S \text{ es un conjunto independiente en } G\}.$$

Por ejemplo, tenemos que $\alpha(K_n) = 1$ y $\alpha(\overline{K_n}) = n$.

Teorema 21 (Independencia y gráficas completas)**.** *Dada una gráfica G de orden n, $\alpha(G) = 1$ si y sólo si G es una gráfica completa.*

Demostración. Primero supongamos que $\alpha(G) = 1$. Es decir, si S es un subconjunto de $V(G)$ con $|S| \geq 2$ entonces S no es independiente. Así, para cualquier par de vértices u y v en $V(G)$, el conjunto $\{u, v\}$ no es independiente. La única arista que puede existir es la que hace adyacentes a u y v. Es decir, uv está en $A(G)$. Ya que u y v fueron arbitrarios, se sigue que cualquier par de vértices en G es adyacente. Por lo tanto, $G \cong K_n$.

Ahora supongamos que G es una gráfica completa. Debemos mostrar que $\alpha(G) = 1$. Para esto podemos mostrar que si S es un subconjunto de $V(G)$ tal que $|S| \geq 2$ entonces S no es independiente. Observemos que, ya que G es completa, para todo subconjunto no vacío T de $V(G)$, con $|T| = p$, tenemos que

$$G[T] \cong K_p.$$

Y, cuando $p \geq 2$, los únicos conjuntos de vértices independientes son los unitarios. Por lo tanto, S no es independiente en G. ☐

2.9 Gráficas bipartitas

El que una gráfica sea bipartita es una propiedad relevante que pueden tener algunas gráficas. Dada una gráfica G, G es *bipartita* si existe una partición[8]

[8]Recordemos que una *partición* de $V(G)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 satisface que

1. $V_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$,
2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y
3. $V_1 \cup V_2 = V(G)$.

A cada uno de los conjuntos V_1 y V_2 se los llama las *partes*.

de $V(G)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 —por lo cual también se le llama *bipartición*— que cumpla que toda arista a en G tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2.

Es muy importante recalcar que la definición de gráfica bipartita no pide que existan aristas en la gráfica, sólo pide que aquellas aristas que existan tengan extremos en partes diferentes. Para probar que una gráfica **no es bipartita** basta con **exhibir** una arista que no tenga extremos en partes distintas, es decir, que sus extremos se queden en la misma parte.

Proposición 22. *Consideremos una gráfica $G = (V(G),\ A(G))$, G es bipartita con partición $\{V_1,\ V_2\}$ si y sólo si las subgráficas $G[V_1]$ y $G[V_2]$ son vacías.*

Proposición 23. *Si $G = (V(G),\ A(G))$ es una gráfica bipartita con bipartición $\{V_1,\ V_2\}$, de orden n y tamaño m tal que*

$$|V_1| = a \text{ y } |V_2| = b$$

entonces

$$m \leq ab.$$

Para el teorema que caracteriza las gráficas bipartitas, necesitamos de un resultado sobre ciclos de longitud impar.

Proposición 24. *Todo camino cerrado de longitud impar posee un subcamino que es un ciclo de longitud impar.*

Demostración. Supongamos que

$$C = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}),$$

donde $x_1 = x_{k+1}$. Recordemos que la longitud de C es $(k+1) - 1 = k$, que debe ser un número impar. En particular, C no puede ser el camino trivial. Procedamos por inducción. Notemos que no es inducción sobre todos los naturales k sino sólo sobre aquéllos que son impares. ¿Y qué pasa cuando $k = 1$? Tendríamos el «camino» cerrado $C = (x_1, x_1)$, el cuál implica que hay una arista que va de x_1 a x_1, es decir, un lazo pero nuestras gráficas no poseen lazos. Por lo tanto, $k = 1$ no es un caso posible. Por lo tanto, el primer caso posible es $k = 3$.

Ya que $k = 2p + 1$ para algún p, podemos pensar la inducción sobre p, con p en $\{1,\ 2,\ \ldots\}$.

Paso base. Para $p = 1$ tenemos que $k = 3$, es decir, la longitud del camino cerrado de longitud impar es tres. En este caso, probaremos que

$$C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$$

es un ciclo. Es decir, debemos probar que todos los vértices x_1, x_2 y x_3 son diferentes entre sí (hemos exceptuado por el primero y el último que por definición de camino cerrado son iguales). Tenemos que:

- Ya que x_1 y x_2 son adyacentes, son diferentes, es decir, $x_1 \neq x_2$.
- Ya que x_2 y x_3 son adyacentes, son diferentes, es decir, $x_2 \neq x_3$.
- Ya que x_3 y x_1 son adyacentes, son diferentes, es decir, $x_3 \neq x_1$.

Así, los vértices x_1, x_2 y x_3 son diferentes entre sí y por lo tanto $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ es un ciclo. Sin embargo, eso no es lo que buscamos pero basta con recordar que todo camino C es subcamino de sí mismo que es un ciclo de longitud impar.

Hipótesis inductiva. Supongamos que todo camino cerrado C' de longitud impar k' con $k' < k$ posee un subcamino que es un ciclo de longitud impar.

Paso inductivo. Consideremos un camino cerrado $C = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$, con $x_1 = x_{k+1}$, de longitud impar k. Hay dos casos posibles.

Caso 1. Los vértices x_1, x_2, $\ldots$, x_k son mutuamente distintos. Es decir, C es en sí mismo un ciclo de longitud impar y C es subcamino de C, que es lo que queríamos.

Caso 2. Existen dos enteros i y j en $\{1, 2, \ldots, k\}$ tales que $i < j$ y $x_i = x_j$. En tal caso, $C[x_i, x_j]$ y $C[x_j, x_i]$ son dos subcaminos cerrados de C que satisfacen que:

- $C = C[x_i, x_j] \circ C[x_j, x_i]$.
- $l(C) = l(C[x_i, x_j]) + l(C[x_j, x_i])$.
- $l(C[x_i, x_j]) \geq 2$ y $l(C[x_j, x_i]) \geq 2$.

Ya que C es de longitud impar entonces $C[x_i, x_j]$ o $C[x_j, x_i]$ es de longitud impar (no puede pasar que ambos sean pares o ambos impares). Sin pérdida de generalidad, supongamos $C[x_i, x_j]$ es de longitud impar. Por hipótesis de inducción, existe un subcamino C' de $C[x_i, x_j]$ que es un ciclo de longitud impar. Faltaría por probar que C' es un subcamino de C. Pero ser subcamino es una relación transitiva y ya que $C[x_i, x_j]$ es subcamino de C, se sigue que C' es subcamino de C. □

Teorema 25 (Una caracterización de las gráficas bipartitas). *Consideremos una gráfica no-trivial G, G es bipartita si y sólo si G no posee ciclos de longitud impar.*

Pensemos en una gráfica bipartita $G = (V(G), A(G))$ con bipartición $\{V_1, V_2\}$. ¿Qué pasa si coloreamos los vértices de G con color azul si están en V_1 o con color rojo si están en V_2? ¿Cómo se verán las aristas —si es que las tienen—? Cada arista tiene que se **bicolor**, no pueden haber aristas monocromáticas. En cualquier trayectoria o ciclo, los colores de sus vértices alternarán entre rojo y azul —o entre azul y rojo—. Esto implica que no pueden existir ciclos de longitud impar.

Demostración. Primero supongamos que G es bipartita. Ya que G es bipartita, sabemos que existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$. Supongamos que los vértices en V_1 los pintamos color azul y los vértices en V_2 los pintamos color rojo. Ya que queremos probar que todo ciclo es de longitud par, consideremos un ciclo

$$C = (x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}),$$

donde $x_{k+1} = x_1$. Notemos que la longitud de C es $(k + 1) - 1 = k$. Así, queremos probar que k es par.

El vértice x_1 es azul o rojo —es decir, está en V_1 o en V_2—; supongamos sin pérdida de generalidad que x_1 es azul. Probaremos que i es par si y sólo si x_i es rojo. Así, queremos probar que:

- si i es par entonces x_i es rojo y
- si x_i es rojo entonces i es par.

La contra positiva de la segunda implicación es:

- si i no es par entonces x_i es azul, es decir, si i es impar entonces x_i es rojo.

Ya que son lógicamente equivalentes, basta con probar que:

- si i es par entonces x_i es rojo y

- si i es impar entonces x_i es azul.

Hagámoslo por inducción sobre i.

Paso base. Si $i = 1$, tenemos que probar que x_1 es azul. Pero así lo supusimos. Si $i = 2$, tenemos que probar que x_2 es rojo. Pero ya que x_1 y x_2 son adyacentes —lo sabemos porque son consecutivos en el ciclo—, la gráfica es bipartita y x_1 es azul, se sigue que x_2 es rojo.

Hipótesis inductiva. Supongamos que para todo i' con $i' < i$ tenemos que si i' es par entonces $x_{i'}$ es rojo y si x' es impar entonces $x_{i'}$ es azul.

Paso inductivo. Consideremos i y definamos $i' = i - 1$. Si i es par entonces i' es impar. Por hipótesis inductiva, $x_{i'}$ es azul. Pero ya que $x_{i'}$ y x_i son adyacentes en una gráfica bipartita, se sigue que x_i es rojo, que es lo queríamos probar. Si, por otro lado, i es impar entonces i' es par. Por hipótesis inductiva, $x_{i'}$ es rojo. Pero ya que $x_{i'}$ y x_i son adyacentes en una gráfica bipartita, se sigue que x_i es azul, que es lo queríamos probar.

De lo anterior, se sigue que x_i es rojo si y sólo si i es par. Ya que x_1 es azul y x_k y x_1 son adyacentes en una gráfica bipartita, se sigue que x_k es rojo. Por lo tanto, k es par, que es lo que queríamos probar.

Ahora probemos el regreso, si todo ciclo en G es de longitud impar entonces la gráfica es bipartita. No sabemos si G es o no conexa pero sí sabemos que todo ciclo en cada componente de G es de longitud impar. Si probamos que cada componente es bipartita entonces tendremos que toda la gráfica lo es. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que G es conexa. Lo importante en una gráfica bipartita es dar la partición en dos conjuntos V_1 y V_2. Para ello, tomemos un vértice u en G. Pongamos a u en V_1. Todos los vecinos de u no podrían estar en V_1, por lo tanto, los pondremos en V_2. ¿Qué pasaría con los vecinos de los vecinos de u? Esos no podrían estar en V_2, tendrían que estar en V_1. □

2.10 Gráficas regulares y cubos

Una gráfica G es *k-regular* o simplemente *regular* si para todo vértice u en G se tiene que $d_G(u) = k$.

Definición 26. El *k-cubo*, para un entero k con $k \geq 1$, que tiene por conjunto de vértices todas las k-adas con entradas cero y uno y dos vértices son adyacentes si y sólo si difieren en exactamente una entrada. La denotamos como Q_k.

Ejemplo 1. Para $k = 1$, tenemos que $V(Q_1) = \{(0),(1)\}$ y $A(Q_1) = \{\{(0),(1)\}\}$. Es decir,

$$Q_1 \cong K_2.$$

Ejemplo 2. Para $k = 2$, tenemos que $V(Q_2) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ y $A(Q_2) = \{\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 1), (1, 0)\}, \{(1, 0), (0, 0)\}\}$. Es decir, Q_2 es un cuadrado.

Ejemplo 3. Para $k = 3$, obtendremos que Q_3 se ve como un cubo.

2.11 Las matrices de adyacencia e incidencia

A cada gráfica podemos asignarle matrices de diferentes formas, a continuación presentaremos dos. Para ello es necesario fijar de antemano los nombres que les daremos a los vértices y a las aristas.

Definición 27. Consideremos una gráfica $G = (V(G), A(G))$, de orden n y tamaño m, y fijaremos etiquetas a los vértices y a las aristas:

- $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y
- $A(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

La *matriz de adyacencia* de G está definida como

$$\mathbb{A}(G) = [a_{ij}],$$

donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \textbf{ no} \text{ son adyacentes.} \end{cases}$$

Ejemplo 4. Consideremos la gráfica G dada por

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

y

$$A(G) = \{a_1 = v_1v_2, a_2 = v_2v_3, a_3 = v_3v_4, a_4 = v_4v_1, a_5 = v_3v_5\}.$$

$$\mathbb{A}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición 28. Consideremos una gráfica $G = (V(G),\, A(G))$, de orden n y tamaño m, y fijaremos etiquetas a los vértices y a las aristas:

- $V(G) = \{v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n\}$ y
- $A(G) = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_m\}$.

La *matriz de incidencia* de G está definida como

$$\mathbb{I}(G) = [a_{ij}],$$

donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vértice } v_i \text{ incide en la arista } e_j \\ 0 & \text{si el vértice } v_i \textbf{ no} \text{ incide en la arista } e_j. \end{cases}$$

Ejemplo 5. Consideremos la gráfica G dada por

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

y

$$A(G) = \{a_1 = v_3v_5, a_2 = v_1v_4, a_3 = v_3v_4, a_4 = v_2v_3, a_5 = v_1v_2\}.$$

$$\mathbb{I}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicios

1. Describe un grupo de cinco personas, en el cual cualesquiera dos de sus miembros tienen exactamente un amigo en común. ¿Puedes encontrar un grupo de cuatro personas con la misma propiedad?

2. Prueba el corolario 10.

3. Dada una gráfica G, definamos el *grado promedio* de G como

$$\mathrm{d}(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} \mathrm{d}_G(v).$$

Prueba con todo detalle que

$$\delta(G) \leq \mathrm{d}(G) \leq \Delta(G).$$

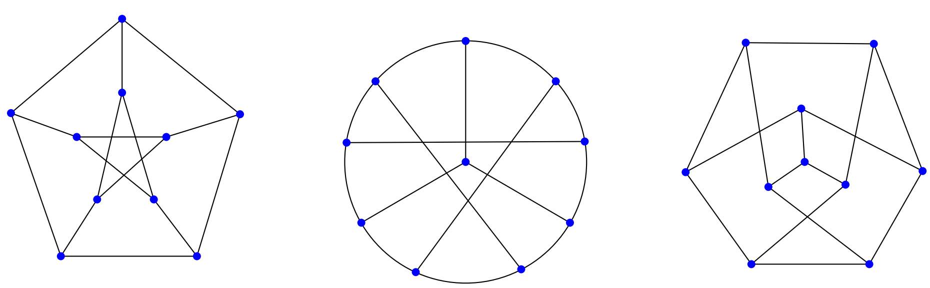
4. Muestra que no existe una gráfica con siete vértices de grado:
   (a) 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5.
   (b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
   (c) 0, 2, 2, 3, 4, 5, 6.
5. Dibuja todas las gráficas de orden cinco, salvo isomorfismos.
6. Consideremos cualquier número natural n con $n \geq 4$. Demuestren que existen dos gráficas G_1 y G_2 de orden n tal que para cualquier par de aristas a_1 y a_2 en $A(K_n)$ se tiene que

$$K_n - \{a_1, a_2\} \cong G_1$$

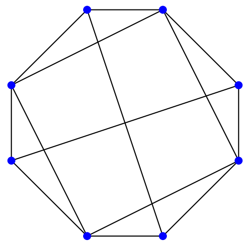
o

$$K_n - \{a_1, a_2\} \cong G_2.$$

7. Dada una gráfica G de orden n y tamaño m, $m = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ si y sólo si $G \cong K_n - a$, donde a es cualquier arista de K_n.
8. ¿Las siguientes tres gráficas son o no isomorfas? Argumenta por qué no o prueba por qué sí.



9. Muestra que la siguiente gráfica es autocomplementaria:
10. Muestra dos gráficas, con seis vértices, tal que todos sus vértices tengan grado dos pero que no sean isomorfas entre sí.



11. Muestra que si G es autocomplementaria entonces su orden es múltiplo de cuatro o múltiplo de cuatro más uno.

12. Si G es una gráfica bipartita, prueba que
$$\alpha(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$
Recuerda que dado un número real x, el *techo* de x, que se denota por $\lceil x \rceil$, es el menor entero n tal que $x \leq n$.

13. Dadas dos gráficas G y H, prueba que G y H son isomorfas si y sólo si $\overline{G}$ y $\overline{H}$ son isomorfas.

14. Considera una subgráfica H de una gráfica dada G, ¿$\overline{H}$ es subgráfica de $\overline{G}$? Pruébalo o da un contraejemplo.

15. Muestra que el complemento de una gráfica bipartita no necesariamente es bipartita.

16. Prueba con la matriz de incidencia que la suma de los grados de los vértices de una gráfica es igual a dos veces el número de aristas.

Capítulo 3

Caminos y conexidad

Lo que nos interesa en una gráfica es saber cuando dos vértices son o no adyacentes. Por lo general encontraremos muchas parejas de vértices que no son adyacentes; sin embargo, a veces existe una manera de **llegar** de uno de esos vértices al otro. ¿Cómo? Moviéndonos de un vértice a otro y a otro de forma tal que siempre demos los **pasos** por medio de una arista, partamos de uno de nuestros vértices que escogimos y lleguemos al otro.

En la gráfica 3.1, nos gustaría que

$$a - c - b - f - g - u$$

fuese un camino del vértice a a al vértice u. También nos gustaría que

$$a - c - b - f - c - b - g - u$$

fuese una trayectoria de a a u. En cambio,

$$a - b - c - f - c - b - g - u$$

no nos gustaría que fuera un camino, ya que los vértices a y b no son adyacentes. De esto podemos concluir que el orden en el que ponemos los vértices sí importa. La estructura matemática que nos permite expresar listas de cosas en las que el orden importa son las sucesiones. Justamente la característica de las sucesiones es que sabemos quién es el primer elemento, el segundo elemento y así.

Definición 29. Dada una gráfica $G = (V(G), A(G))$, un *camino* en G es una sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ donde cada x_i está en $V(G)$, para todo i en $\{1, 2, \ldots, p-1, p\}$ y el vértice x_i es adyacente al vértice x_{i+1} para todo i en $\{1, 2, \ldots, p-1, p\}$.

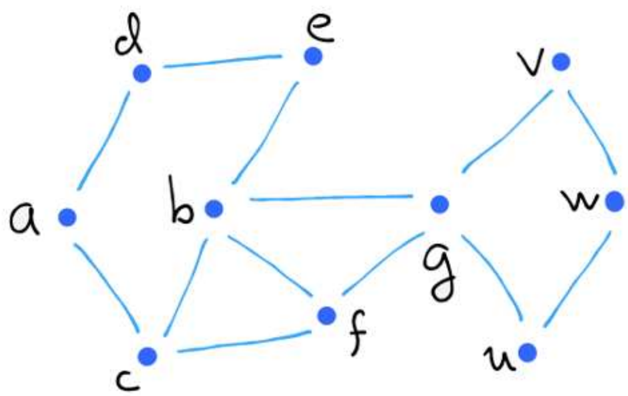


Figura 3.1: Una gráfica G

Así, $(a,\ c,\ b,\ f,\ g,\ u)$ y $(a,\ c,\ b,\ f,\ c,\ b,\ g,\ u)$ son los caminos que mencionamos arriba.

Dos sucesiones —en general— son iguales si y sólo si son iguales entrada a entrada (es decir, sus primeros elementos deben de ser iguales, sus segundos elementos deben de ser iguales y así). Recordemos que las parejas ordenadas son sucesiones de dos elementos y dos parejas ordenadas son iguales si y sólo si son iguales entrada a entrada.

Ya que los caminos en particular son sucesiones, dos caminos son iguales si y sólo si son iguales entrada a entrada. Es decir, si difieren en tan solo una entrada entonces son diferentes.

A los caminos podemos asignarles una longitud. En particular, nos gustaría que el camino *no me muevo* (a) tenga longitud cero y el camino formado por una sola arista $(a,\ c)$ tenga longitud uno.

Definición 30. Dado un camino $C = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k)$ en una gráfica $G = (V(G),\ A(G))$, la *longitud* de C, que denotamos por $l(C)$, es el número de aristas que el camino recorre contando todas las veces que pasemos por una misma arista. Ya que cada vez que pasamos de un vértice a otro recorremos una arista, tendremos que $l(C) = k - 1$ (que es el número de veces que pasamos de un vértice a otro en C).

Los caminos formados por un solo vértice se llaman caminos *triviales*. Un camino que empieza y termina en el mismo vértice es *cerrado* y si empieza y termina en vértices distintos es *abierto*. Los caminos triviales son cerrados.

Un camino $C = (u = x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k = v)$ es un (u, v)-*camino* y u y v son los *extremos* de C.

Ahora supongamos que existe un camino entre dos vértices dados, ¿qué tanto nos dice ese camino sobre esos dos vértices? Pues al menos hay una forma de llegar de un vértice al otro. ¿Podría decirnos algo la longitud del camino sobre esos vértices? No. Los vértices podrían estar muy «cerca» —aunque todavía no hemos definido que significa que *estén cerca*—. Incluso podrían ser adyacentes.

Por lo anterior es necesario definir nuevos tipos de caminos que nos den más información. ¿Qué problema tienen los caminos, por qué no son buenos para darnos información sobre la relación entre un vértice y otro? Porque podrían pasar varias veces por el mismo vértice o por la misma arista. Entonces podemos definir dos tipos de caminos: los paseos y las trayectorias.

Un *paseo* es un camino que no repite aristas y una *trayectoria* es un camino que no repite vértices. ¿Cuál es la relación entre paseos y trayectorias con los caminos? Los paseos y las trayectorias son caminos, ¿por qué? porque así los definimos.

Ahora, ¿cuál es la relación entre paseos y trayectorias? ¿Será que todos los paseos son trayectorias, que las trayectorias son paseos o no se relacionan entre ellos? Para responder a la pregunta, notemos que si un camino repite aristas —es decir, no es paseo— entonces necesariamente debo pasar varias veces por los extremos de las aristas que repite, es decir, el camino repite vértices. Acabamos de mostrar que **si un camino no es un paseo entonces no es una trayectoria**. En su forma contrapositiva, diríamos que **si un camino es una trayectoria entonces es un paseo** o, para ser breves, **toda trayectoria es un paseo**.

Los paseos y las trayectorias tienen una longitud porque en particular son caminos. Los paseos pueden ser abiertos y cerrados pero hay solo una trayectoria que es cerrada: la trivial. Todas las demás son necesariamente abiertas porque por definición las trayectorias no repiten vértices.

3.1 Caminos dentro de caminos

Sabemos que toda trayectoria es un camino pero el recíproco por lo general no es cierto, es decir, no todo camino es una trayectoria. Sin embargo, tiene sentido pensar que si entre dos vértices hay un camino, ahí dentro debe existir una trayectoria entre esos dos vértices —si podemos quitar los vértices que aparecen repetidamente—. Es decir, dentro de todo $(u,\, v)$-camino debe existir una $(u,\, v)$-trayectoria.

Primero hay que definir qué significa que un haya un camino dentro de otro camino —y el nombre natural para tales estructuras es el de subcamino—. Recordemos que los caminos son sucesiones y tenemos la noción de subsucesión. Definámosla informalmente. Supongamos que tenemos la siguiente sucesión, obtenida de la gráfica G en la figura 3.1:

$$(a, c, f, g, b, f, g, u)$$

y tachemos algunos de sus elementos

$$(a, c, \cancel{f}, g, \cancel{b}, \cancel{f}, g, u).$$

Al escribir los elementos restantes **en el mismo orden en el que aparecen**[1] obtenemos una *subsucesión* de la sucesión de la que partimos:

$$(a, c, g, g, u).$$

Este ejemplo muestra que **no toda subsucesion de un camino es un camino**. Así podemos definir:

Definición 31. Dado un camino $C = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k-1},\, x_k)$ en una gráfica $G = (V(G),\, A(G))$, un *subcamino* de C es una subsucesión C' de C tal que C' es un camino y todas las aristas que están C' también están en C.

Notemos que toda camino es subcamino de sí mismo.

Al principio dijimos que «dentro de todo $(u,\, v)$-camino debe existir una $(u,\, v)$-trayectoria», que formalmente sería:

Proposición 32. *Todo $(u,\, v)$-camino posee un subcamino que es una $(u,\, v)$-trayectoria.*

Demostración. Hagámoslo por inducción sobre la longitud del $(u,\, v)$-camino $C = (u = x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k-1},\, x_k = v)$.

Caso base. Si $l(C) = 0$ entonces $k = 1$, es decir, $C = (u = x_1 = v)$. Claramente, C es un subcamino de C y C es una $(u,\, v)$-trayectoria.

Revisemos un par de casos más para ver qué pasa. Si $l(C) = 1$ entonces $k = 2$, es decir, $C = (u = x_1,\, x_2 = v)$. ¿Podría pasar que $u = v$ y así

[1] Porque recordemos que lo importante en la sucesiones es su *orden*, es decir, saber quien está detrás y quien está adelante en la sucesión.

tengamos que $C = (u,\, u)$? Por la definición de camino, tendríamos que u es adyacente a u, es decir, habría un lazo en u; ésto no es posible ya que por definición G no tiene lazos. Por lo tanto, necesariamente tenemos que $u \neq v$, es decir, C es una $(u,\, v)$-trayectoria. Ya que también C es un subcamino de sí mismo, tenemos lo que queríamos. Si, en cambio, $l(C) = 2$ entonces $k = 3$ y $C = (u = x_1,\, x_2,\, x_3 = v)$; tenemos dos posibilades: u y v son o no iguales. Si son iguales, $C' = (u = v)$ es un $(u,\, v)$-subcamino de C que es una $(u,\, v)$-trayectoria. Si no son iguales, notemos que también u y x_2 deben ser diferentes, porque en G no hay lazos, y por la misma razón x_2 y v son diferentes. Por lo tanto, C es un subcamino de C y C es una $(u,\, v)$-trayectoria.

Hipótesis inductiva. Supongamos que todo $(u,\, v)$-camino C' con $l(C') < l(C) = k - 1$ posee un subcamino que es una $(u,\, v)$-trayectoria.

Paso inductivo. Consideremos el $(u,\, v)$-camino $C = (u = x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{k-1},\, x_k = v)$.

Si todos los vértices en C son mutuamente diferentes entonces C es un subcamino de C que es una $(u,\, v)$-trayectoria. Así pues, supongamos que hay al menos un par de vértices iguales en C. Esto implica que existen dos números i y j en el conjunto de índices del camino $\{1,\, 2,\, \ldots,\, k-1,\, k\}$ tales que $i < j$ y $x_i = x_j$. Construyamos un $(u,\, v)$-subcamino propio de C,

$$C' = (u = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k).$$

«Eliminamos» de C el subcamino $(x_i,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{j-1},\, x_j)$ que tiene longitud $j - i$ (y ya que $i < j$, tenemos que $j - i$ es estrictamente mayor que cero). Así, la longitud de C' es la longitud de C menos $j - i$, es decir, $l(C') < l(C)$. Por lo tanto podemos aplicar la hipótesis inductiva, C' posee un subcamino C'' que es una $(u,\, v)$-trayectoria.

Sólo nos falta verificar que C'' es un subcamino de C (sólo sabemos que C'' es subcamino de C'). También sabemos que C' es un subcamino de C. Notemos que si en C tachamos todos los elementos que tachamos de C para obtener C' y de C' para obtener C'', obtendremos C''. Por lo tanto, C'' es un subcamino de C que es una $(u,\, v)$-trayectoria, que es lo que queríamos probar. $\square$

¿Cuándo se prodrían *pegar* dos caminos, digamos C_1 y C_2 de forma tal que obtengamos un nuevo camino C? Más aún, nos gustaría que tanto C_1 como C_2 puedan verse como subcaminos de C y, todavía más, que $l(C) = l(C_1) + l(C_2)$.

Supongamos que C_1 es el $(u,\, v)$-camino $(u = a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_p = v)$ y que C_2 es el $(x,\, y)$-camino $(x = b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_q = y)$.

Una condición que pueda permitir pegarnos C_1 y C_2 sería que los vértices v y x sean adyacentes. En ese caso, ciertamente la sucesión

$$C' = (u = a_0, a_1, \ldots, a_p = v, b_0 = x, b_1, \ldots, b_q)$$

es un camino en G y, más aún, es fácil checar que tanto C_1 como C_2 son subcaminos de C. ¿Cuál es la longitud de C'? Como C' recorre tanto C_1 como C_2, tenemos que

$$l(C') \geq l(C_1) + l(C_2).$$

¿Qué otras aristas recorre C'? Si revisan, C' sólo pasa por una arista más. Es decir, tenemos que

$$l(C') = l(C_1) + l(C_2) + 1,$$

que no es lo que queríamos.

Por lo anterior, debemos buscar otra condición que sí nos sirva. ¿Qué pasa, si en vez de pedir que v y x sean adyacentes, pedimos que sean iguales?

Definición 33. Dados dos caminos $C_1 = (u = a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_p = v)$ y $C_2 = (x = b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_q = y)$ que satisfagan que $v = x$, la *concatenación* de C_1 y C_2 es el camino

$$C_1 \circ C_2 = (u = a_0, a_1, \ldots, a_p = v = x = b_0, b_1, \ldots, b_q = y).$$

Definición 34. Nos falta por introducir una notación más sobre caminos. Supongamos que

$$P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

es un camino en una gráfica dada G y que i y j en $\{0,\, 1,\, \ldots,\, k\}$ satisfacen que $i < j$. El $(x_i,\, x_j)$-*subcamino* es

$$P[x_i, x_j] = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j).$$

Definición 35. Nos falta por introducir una notación más sobre caminos. Supongamos que

$$P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$$

es un $(x_0,\, x_k)$-camino, al recorrerlo en el sentido opuesto

$$P^{-1} = (x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_1)$$

obtenemos un $(x_k,\, x_1)$-camino.

Proposición 36. *Dados una gráfica G y un camino $C = (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_k)$ en G, si i está en $\{0,\, 1,\, \ldots,\, k\}$ entonces:*

1. $C = C[a_0,\, a_i] \circ C[a_i,\, a_k]$ *y*
2. $l(C) = l(C[a_0,\, a_i]) + l(C[a_i,\, a_k])$.

Proposición 37. *Si P es un camino en una gráfica dada G, entonces se tiene que*

$$l(P) = l(P^{-1}).$$

3.2 Ciclos

Aunque no existen trayectorias cerradas distintas de las triviales, no es difícil pensar en caminos cerrados que son como trayectorias (y no son nada triviales), se llaman ciclos.

Definición 38. Un *ciclo* es un camino cerrado no-trivial y que no repite vértices, salvo el primero y el último.

Así, todo ciclo debe de tener longitud al menos tres.

No todas las gráficas tienen ciclos, es fácil imaginar muchas que no los tienen. Esas gráficas son una familia que luego estudiaremos: los árboles.

Como pasaba con las trayectorias y los caminos, todo ciclo es un camino cerrado pero no todo camino cerrado es un ciclo. ¿Será que todo camino cerrado posee un subcamino que sea un ciclo?

La respuesta es no, no todo camino cerrado posee un ciclo. Pensemos, por ejemplo, en la gráfica G que aparece en **??**. Tenemos que la sucesión $(a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, d,\, c,\, b,\, a)$ es un camino cerrado en G. Sin embargo G no tiene ningún ciclo. ¿Puedes dar más ejemplos de caminos cerrados que no impliquen la existencia de un ciclo?

Si agregamos una condición más, podemos asegurar que existen ciclos.

Teorema 39. *Dada una gráfica G, si C es un camino cerrado de longitud impar en G entonces existe un subcamino de C de longitud impar que es un ciclo.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre la longitud de C. Ya que no tenemos lazos, el camino cerrado de longitud impar más pequeño será de longitud tres.

Caso base. Supongamos que la longitud de C es tres, así tenemos que

$$C = (v_0, v_1, v_2, v_0).$$

Ya que v_0v_1 es una arista de G, tenemos que $v_0 \neq v_1$. Como v_1v_2 es otra arista, tenemos que $v_1 \neq v_2$. Y, finalmente, ya que v_2v_0 también es arista, tenemos que $v_2 \neq v_0$. Por lo tanto, C es un ciclo.

Hipótesis inducción. Para un entero impar k con $k \geq 3$, supongamos que todo camino cerrado C' de longitud impar menor que k posee un subcamino que es un ciclo.

Paso inductivo. Tomemos un camino cerrado de longitud impar k, llamémosle C. Digamos quién es,

$$C = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0).$$

Consideraremos dos casos.

Caso 1. Para todo i, $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ con $i \neq j$ se tiene que

$$v_i \neq v_j$$

entonces C es un ciclo por definición.

Caso 2. Existen i, $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ con $i \neq j$ se tiene que

$$v_i = v_j.$$

Así, podemos descomponer C en los siguientes caminos cerrados:

$$C' = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j)$$

y

$$C'' = (v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{i-1}, v_i)$$

Observemos que

$$C = C' \circ C''.$$

Por la proposición 36 sabemos que

$$l(C) = l(C') + l(C'')$$

y ya que $l(C)$ es impar, $l(C')$ o $l(C'')$ debe de ser un número impar. $\square$

3.3 Conexidad

Una gráfica es conexa si está formada *por una sola pieza.* Formalmente

Definición 40. Una gráfica $G = (V(G),\ A(G))$ es *conexa* si para entre cualquier par de vértices u y v de G, existe un camino que va de u y llega a v, es decir, un $(u,\ v)$-camino.

Si una gráfica no es conexa entonces decimos que es *inconexa* o que *está desconectada*[2].

Notemos que la gráfica K_1, es decir, aquella formada por sólo un vértice es conexa porque satisface la definición de conexidad (cualesquiera dos vértices serán el mismo y entre ellos ciertamente existe el camino trivial).

La conexidad es una de la propiedades más importantes de las gráficas, ya que en muchos casos nos permite fijarnos sólo en aquellas partes de una gráfica que están formadas por una pieza.

Definición 41. Dada una gráfica $G = (V(G),\ A(G))$ —conexa o no—, consideremos dos vértices u y v en $V(G)$. Diremos que u y v *están conectados* (y lo denotaremos por $u \sim v$) si existe un $(u,\ v)$-camino en G.

Proposición 42. *La relación de «estar conectados» es de equivalencia.*

Demostración. Tenemos que probar tres cosas, que la relación de «estar conectados» es:

(i) reflexiva,
(ii) simétrica y
(iii) transitiva.

Primero probemos que la relación «estar conectados» es **reflexiva**, es decir, debemos probar que para todo vértice u en $V(G)$ se tiene que $u \sim u$. Para ello, basta con exhibir un $(u,\ u)$-camino: el trivial (u).

Ahora probemos que la relación es **simétrica**, es decir, que siempre dados dos vértices u y v en $V(G)$ se tenga que $u \sim v$, también es cierto que $v \sim u$. Por hipótesis, sabemos que existe un $(u,\ v)$-camino, sea $P = (u = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k = v)$. Para probar que $v \sim u$, por la definición de «estar conectados» debemos **exhibir** un $(v,\ u)$-camino en G y ya tenemos un candidato natural:

$$P^{-1} = (v = x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0 = u).$$

[2]En México solemos decir «disconexa» aunque no es estrictamente el término apropiado —y se puede usar—.

Ahora debemos mostrar que efectivamente P^{-1} es un (v, u)-camino: es una sucesión de vértices, pues P lo es; cualesquiera dos vértices consecutivos en P^{-1} son adyacentes porque esos dos vértices también son consecutivos en P —aunque volteados— y como es un camino, son adyacentes y, finalmente, empieza en v y termina en u.

Finalmente, probemos que la relación es **transitiva**, es decir, que si tenemos tres vértices u, v y w tales que

$$u \sim v \text{ y } v \sim w,$$

entonces debemos mostrar que $u \sim w$. Es decir, sabemos que existen un (u, v)-camino P_1 y un (v, w)-camino P_2. Así, $P_1 \circ P_2$ es un (u, w)-camino y, por lo tanto, $u \sim w$.

Por todo lo anterior, la relación de «estar conectados» es de equivalencia. □

3.4 Recordatorio sobre relaciones de equivalencia y particiones

Recordemos que toda relación de equivalencia induce una partición y toda partición genera una relación de equivalencia. Para fijar ideas, revisemos la definición de partición.

Definición 43 (Partición de un conjunto)**.** Consideremos un conjunto no vacío X. Una familia de subconjuntos S_1, S_2, ..., S_k es una *partición* de X si:

1. $S_i \neq \emptyset$ para todo i en $\{1, 2, \ldots, k\}$,
2. $S_i \neq S_j$ para todo par de enteros i y j en $\{1, 2, \ldots, k\}$ tales que $i \neq$ y
3. $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k = X$.

Pensemos en un conjunto no vacío X y una relación de equivalencia R sobre X, recordemos que escribimos

$$aRb$$

para denotar que el elemento a está relacionado con el elemento b bajo la relación R o que a está R-relacionada con b. Ya que R es de equivalencia tenemos que: (i) aRa para toda a en X, que es la **reflexividad**, (ii) si dados

a y b en X se tiene que aRb entonces bRa, la **simetría**, y (iii) si para a, b y c en X tenemos que aRb y bRc entonces se tiene que aRc, la **transitividad**.

Para cada p en X podemos definir el conjunto de todos aquellos elementos en X que están R-relacionados con él.

$$R[p] = \{q \colon q \text{ está } R\text{-relacionado con } p\},$$

este conjunto en la *clase de equivalencia* de p bajo R. Observemos las siguientes propiedades de las clases de equivalencia:

- $R[p]$ es un subconjunto de X por definición.

- Para cada p en X, el conjunto $R[p]$ es diferente del vacío ya que $p \in R[p]$ porque pRp.

- Para cualesquiera elementos p y q en X, se tiene que pRq si y sólo si $R[p] = R[q]$.

  Primero supongamos que pRq y probemos que $R[p] = R[q]$. Veamos que $R[p] \subseteq R[q]$, para ello tomemos x en $R[p]$. Por definición, tenemos que xRp. Por transitividad, xRq y, por lo tanto, x está en $R[q]$.

  Observemos que la demostración de $R[q] \subseteq R[p]$ sería análoga a la anterior si tuviésemos que qRp. Pero sí lo tenemos por la simetría. Por lo tanto, $R[p] = R[q]$.

  Ahora supongamos que $R[p] = R[q]$, probaremos que pRq. Como ya notamos, sabemos que siempre tenemos que $p \in R[p]$ y, ya que son iguales, $p \in R[q]$. Por definición, se sigue que pRq.

- Si para cualesquiera dos elementos p y q en X se tiene que $R[p] \neq R[q]$ entonces $R[p] \cap R[q] = \emptyset$.

  La contrapositiva de la afirmación anterior sería: si $R[p] \cap R[q] \neq \emptyset$ entonces $R[p] = R[q]$. Probarla resulta más fácil; ya que $R[p] \cap R[q]$ es diferente del vacío, existe un elemento r en la intersección. Por la definición de $R[\_]$, $r \sim p$ y $r \sim q$. Por simetría y transitividad, tendríamos que $p \sim q$. Por lo tanto, $R[p] = R[q]$.

  Por la definición de $R[q]$, tenemos que $p \in R[q]$. Para todo elemento q en $R[p]$ se tiene que qRp. Esto implica que $R[q] = R[p]$ por la transitividad.

Dado un elemento u en X, $R[u]$ es la clase de equivalencia de u y, más aún, para todo otro elemento v en $R[v]$ tenemos que

$$R[v] = R[u].$$

Supongamos que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j, \ldots$ son las clases de equivalencia inducidas por la relación $\sim$ en X. Si escogemos un elemento en Y_1 y le llamamos y_1, tendremos que

$$Y_1 = R[y_1].$$

En general, podemos escoger un elemento en Y_j, al cual llamaremos y_j, y tendremos queda

$$Y_j = R[y_j].$$

El conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots\}$ es un *conjunto de representantes* de las clases de equivalencia. Si hay un número finito de clases de equivalencia, siempre existe un conjunto de reprensante. Si, en cambio, el número de clases de equivalencia es infinito entonces el **axioma de elección** nos asegura que existe un conjunto de representantes.

3.5 Retornando a la conexidad

Consideremos una gráfica $G = (V(G), A(G))$ y la relación $\sim$ de «estar conectados» en dicha gráfica. Podemos considerar las clases de equivalencia V_1, $V_2, \ldots, V_k$ inducidas por la relación $\sim$ en $V(G)$. Ahora podemos pensar en las subgráficas de G inducidas por cada una de las clases de equivalencia, para abreviar definamos:

$$G_i = G[V_i],$$

para cada i en $\{1, 2, \ldots, k\}$. Notemos que $V(G[V_i]) = V_i$.

Más aún, si G no tiene vértices aislados entonces los conjuntos $A(G[V_1])$, $A(G[V_2]), \ldots, A(G[V_k])$ son una partición de las aristas de G.

¿Por qué tenemos que pedir que G no tenga vértices aislados? Cada vez que G tiene un vértice aislado, llamémosle u, para cualquier otro vértice v en G tenemos que $u \nsim v$. El único vértice con el que está relacionado u es él mismo. Es decir, su clase de equivalencia bajo la relación «estar conectado» es unitaria[3], digamos que V_j. Así,

$$G[V_j] \cong K_1.$$

[3]Un conjunto A es *unitario* si $|A| = 1$. En inglés es *singleton*.

Esto nos daría que
$$A(G[V_j]) = \emptyset,$$
pero en las particiones no permitimos que haya partes vacías.

Por otra parte, si G no tiene vértices aislados significa que para todo vértice u en G, tenemos que
$$d_G(u) \geq 1.$$
Es decir, existe (al menos) un vértice v en $N_G(u)$. Por lo tanto, $u \sim v$. Esto implica tanto u como v están en la misma clase de equivalencia. Es decir, si una gráfica no tiene vértices aislados entonces las subgráficas inducidas son diferentes de la trivial.

Probemos que $A(G[V_1])$, $A(G[V_2])$, $\ldots$, $A(G[V_k])$ son una partición de las aristas de G.

Cada $A(G[V_i])$ es diferente del vacío.

Ya que G no posee vértices aislados, ya lo mostramos.

Cada $A(G[V_i])$ es un subconjunto de $A(G)$.

Por definición, V_i es un subconjunto de $V(G)$. Más aún, $G[V_i]$ es una subgráfica de G. Por definición de subgráfica, $A(G[V_i])$ es un subconjunto de $A(G)$.

$A(G[V_1]) \cup A(G[V_2]) \cup \cdots \cup A(G[V_k])$ es $A(G)$.

Es decir, para cada arista e de $A(G)$, debemos mostrar que existe un j en $\{1, 2, \ldots, k\}$ tal que e está en $A(G[V_j])$. Sabemos que existen dos vértices en G, digamos u y v, tales que $e = uv$. Claramente, u está en una de las clases de equivalencia, supongamos que es V_j (es decir, $R[u] = V_j$). Ya que u y v están conectados, se sigue que v está en V_j. Finalmente, por definición de subgráfica inducida tenemos que e está en la gráfica $G[V_j]$, es decir, $e \in A(G[V_j])$.

$A(G[V_i]) \cap A(G[V_j]) = \emptyset$ si $i \neq j$.

La forma contrapositiva afirma que si $A(G[V_i]) \cap A(G[V_j]) \neq \emptyset$ entonces $i = j$. Supongamos, pues, que existen dos enteros i, j en $\{1, 2, \ldots, k\}$, tales que $A(G[V_i]) \cap A(G[V_j]) \neq \emptyset$. Es decir, existe una arista a en $A(G[V_i]) \cap A(G[V_j])$. Supongamos $a = xy$, con x y y en $V(G)$. Por definición de subgráfica inducida, tenemos que $x, y \in V(G[V_i])$ y que $x, y \in V(G[V_j])$. Es decir, $x \in V_i$ y $x \in V_j$. Ya que V_1, V_2, $\ldots$, V_k es una partición de $V(G)$, tenemos que $V_i = V_j$, es decir, $i = j$.

3.6 Las componentes de una gráfica

La familia de gráficas G_1, G_2, …, G_k tiene otra propiedad en particular: cada G_i es conexa. Para probarlo, basta con exhibir un (u, v)-camino en G_i (esto es muy importante) para cualquier par de vértices u y v en V_i.

Recordemos que V_i es una clase de equivalencia inducida por la relación «estar conectados» en $V(G)$. Esto significa que $u \sim v$, es decir, existe un (u, v)-camino en G (todavía no sabemos que dicho camino exista en G_i), sea $P = (u = x_0, x_1, \ldots, x_p = v$ dicho camino. Ese camino muestra que $u \sim x_j$, para todo j entre cero y p. Pero eso implica que cada x_j está en la misma clase de equivalencia que u, es decir, $x_j \in V_i$, para todo j en $\{0, 1, \ldots, p\}$. Por la definición de subgráfica inducida, cada arista $x_j x_{j+1}$ está en $G[V_i]$, para todo j en $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Por lo tanto, el camino P está en $G[V_i] = G_i$, es decir, G_i es conexa, que es lo que queríamos probar.

Podemos decir aún más, las gráficas G_1, G_2, …, G_k son las subgráficas **conexas *más grandes*** de G. Es decir, si nos fijamos en una subgráfica G' de G de forma tal que alguna G_i se quede completamente contenida en G' y, más aún, que G' sea *más grande* que G_i (ya sea porque tenga un vértice o una arista de más, al menos), entonces G' no puede ser conexa. Consideremos esas dos posibilidades. La prueba de lo anterior guarda gran semejanza con la última que acabamos de acometer.

Procederemos por contradicción, supongamos primero que en G' hay un vértice que no está en G_i, sea x. Recordemos que $G_i = G[V_i]$, donde V_i es una clase de equivalencia inducida por la relación «estar conectados» en $V(G)$. Ya que x no está en G_i, $x \notin V(G_i)$, es decir, $x \notin V_i$. Para cualquier vértice u en V_i, tenemos que $x \nsim u$. Para simplificar, fijemos un vértice u_0 en V_i. Como dijimos, $x \nsim u_0$ y, por lo tanto, no existe ningún (x, u_0)-camino en G. Por lo tanto, los vértices x y u_0 no están conectados, pero eso es una contradicción, ya que tanto x como u_0 son vértices de G', que es una subgráfica conexa de G.

La prueba anterior es poco elegante —por no decir *fea*—. Pero se puede reescribir para que sea directa (es decir, sin proceder por contradicción).

Falta considerar el caso en el que en G' haya una arista que no esté en G_i, digamos que la arista $a = xy$ está en G' pero no en G_i. Por lo que probamos arriba, llegaríamos a una contradicción si el vértice x o el y no estuviesen en $V(G_i)$, esto es, x, $y \in V(G_i) = V_i$. Por definición, $G_i = G[V_i]$, es decir, G_i es una subgráfica **inducida** de G. Por lo tanto, la arista a necesariamente tiene que estar en G_i, lo que es una contradicción.

Esta familia de subgráficas de G es una muy particular, cada una de ellas un *pedazo* (conexo) de G pero además son los pedazos más grandes. Son las **componentes** de G.

Definición 44. Dada una gráfica G, una subgráfica G' de G que sea conexa y máxima por contención tanto en vértices como en aristas es una *componente (conexa)* de G.

Todas las gráficas poseen componentes, la pregunta es ¿cuántas componentes poseen? Si la gráfica es conexa (es decir, la relación «estar conectados» sólo induce una clase de equivalencia en sus vértices) entonces tendrá sólo una componente conexa.

Proposición 45. *Una gráfica es conexa si y sólo si tiene sólo una componente.*

Sin embargo, usualmente la usaremos de la forma siguiente:

Corolario 46. *Una gráfica no es conexa si y sólo si posee al menos dos componentes.*

3.7 Inconexidad

Supongamos que G es una gráfica inconexa. Así, por la definición de conexidad sabemos que existen dos vértices u y v tales que no hay ningún camino que los una. Definamos los conjuntos

$$A = \{x\colon \text{existe un } (x, u)\text{-camino en } G\}$$

y

$$B = V(G) \setminus A.$$

Sabemos que $u \in A$ y que $v \notin A$, es decir, $v \in B$. Por lo tanto $\{A,\, B\}$ es una partición de $V(G)$ y, más aún, no existen aristas en G que tengan un extremo en A y otro en B.

Teorema 47. *Dada una gráfica G, G es inconexa si y sólo si existe una partición $\{A,\, B\}$ de $V(G)$ tal que ninguna arista de G tiene un extremo en A y otro en B.*

Demostración. Probemos primero la ida, supongamos que G es inconexa. Así, como explicamos arriba, tenemos que existen dos vértices u y v que no están conectados por ningún camino. Definimos

$$A = \{x \colon \text{existe un } (x,u)\text{-camino en } G\}$$

y

$$B = V(G) \setminus A.$$

Tenemos que $\{A, B\}$ es una partición de $V(G)$. Falta por demostrar que no existen aristas que tengan un extremo en A y otro en B; procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existen vértices w y z con $w \in A$ y $z \in B$ tales que $wz \in A(G)$.

`Falta por terminar la prueba.` □

3.8 Otros resultados sobre conexidad

Existen otras propiedades equivalentes a ser conexas.

Proposición 48. *Una gráfica es conexa si y sólo si posee un camino abierto que pase por todos sus vértices.*

Demostración. Probemos primero la ida, supongamos que G es una gráfica conexa. En algunos casos resulta muy útil saber quiénes son los vértices, **sin pérdida de generalidad** supongamos que

$$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Ya que G es conexa, existe un camino P_1 que va del vértice v_1 al vértice v_2. Y también existe un camino P_2 que va del vértice v_2 al vértice v_3. En general, existe un camino P_i que va del vértice v_i al vértice v_{i+1}, para todo i en $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Basta con concatenar los caminos para obtener el camino deseado.

Ahora probemos el regreso, supongamos que existe un camino abierto C que pasa por todos los vértices de la gráfica G. Debemos probar que G es conexa. Primero digamos explícitamente quién es C, supongamos que

$$C = (x_0, x_1, \ldots, x_k).$$

Para probar que G es conexa, para cualquier par de vértices distintos u y v en G, debemos probar que existe un (u, v)-camino. Ya que C pasa por todos los vértices de G, existen i y j en $\{1, 2, \ldots, k\}$ tales que

$$x_i = u \text{ y } x_j = v.$$

Sabemos que $i = j$ pero no sabemos si $i < j$ o $j < i$.

Caso 1. Supongamos que $i < j$.

En este caso, el subcamino $C' = C[x_i, x_j]$ de C es un (u, v)-camino.

Caso 2. Supongamos que $j < i$.

En este caso, el subcamino $C' = C[x_j, x_i]$ de C es un (u, v)-camino.

Ya que ambas pruebas son (casi) idénticas y, en realidad, nos basta con que exista un camino entre u y v, sin importar la dirección, solemos decir que **sin pérdida de generalidad** supondremos que $i < j$ y sólo exhibir el primer caso. □

3.9 ¿Cómo desconectar una gráfica?

Primero definamos dos operaciones: quitar un vértice y quitar una arista. Si G es una gráfica y u es un vértice en G, ¿qué gráfica nos quedará al quitar u?, es decir, ¿quién es $G - u$? Si u fuese un vértice aislado en G, al *quitarlo* no pasaría nada pero ¿qué pasa si hubiesen aristas de G que tengan como extremo a u? No podemos dejar tales arista en $G - u$ (porque en tal caso ya no sería una gráfica), es decir, debemos quitarlas. Así, tenemos que:

Definición 49. Dadas G una gráfica y u un vértice de G, definimos:

$$G - u = (V(G) \setminus \{u\}, A(G) \setminus \{e \colon e \in A(G) \text{ y } u \text{ es un extremo de } e\}).$$

Existe una manera más fácil de definir $G - u$. Notemos lo siguiente:

$$G - u = G[V(G) \setminus \{u\}].$$

Para el caos en el que G sea una gráfica y e sea una arista de G, la definición es mucho más simple, ya que al quitar una arista (pero no sus extremos), lo que nos queda no puede dejar de ser una gráfica.

Definición 50. Dadas G una gráfica y e una arista de G, definimos:

$$G - e = (V(G), A(G) \setminus \{e\}).$$

Estas dos operaciones son importantes porque en varios casos nos permitirán utilizar inducción.

Teorema 51. *Consideremos una gráfica G y tomemos un vértice u de G. Si G es conexa y $d_G(u) = 1$ entonces $G - u$ es conexa.*

Demostración. Para probar que $G - u$, debemos mostrar que para cualquier par de vértices x y y en $V(G-u)$, existe un (x, y)-camino en $G-u$. Sabemos sin duda alguna que para todo par de vértices x y y en $V(G)$, existe un (x, y)-camino C en G (podría —o no— pasar por u). Si no pasa por u entonces C es un (x, y)-camino en $G - u$, que es lo que queríamos. Así, supongamos que C sí pasa por u, entonces debemos hallar un (x, y) que no pase por u. Primero digamos quién es C, sea

$$C = (x = a_1, a_2, \ldots, a_k = y).$$

Ya que C pasa por u (y, más aún, $u \neq x$ y $u \neq y$), existe un i en $\{2, 3, \ldots, k - 1\}$ tal que

$$a_i = u.$$

Por la definición de camino, sabemos que tanto a_{i-1} como a_{i+1} son vértices adyacentes u.

Por hipótesis sabemos que el vértice u tiene grado uno en G, es decir, tiene un único vecino, llamémosle v (esto es, $N_G(u) = \{v\}$.

Por lo tanto,

$$a_{i-1} = v = a_{i+1}.$$

El subcamino

$$C' = (x = a_1, \ldots, a_{i-1} = a_{i+1}, \ldots, a_k = y)$$

de C que no pasa por el vértice a_i, pero pasa por el resto de los vértices por los que pasaba C. ¿Con esto terminamos? Podría ser que sí o podría ser que no. ¿Qué pasa si C pasaba más veces por u? Tenemos dos opciones.

Opción 1

Repetimos el procedimiento anterior tantas veces como veces aparezca u en C. En algún momento debemos terminar ya que el camino es finito.

Opción 2

Sabemos que todo (x, y)-camino posee una subsucesión que es una (x, y)-trayectoria. Esa (x, y)-trayectoria no puede pasar por u, como argumentamos anteriormente.

En ambos casos, obtenemos un (x, y)-camino en $G - u$. Por lo tanto, $G - u$ es conexa. □

Proposición 52. *Dados una gráfica conexa G y una arista a de G, $G - a$ es conexa si y sólo si existe un ciclo en G que pasa por a.*

Corolario 53. *Dados una gráfica conexa G y una arista a de G, $G - a$ está desconectada si y sólo si a no está en ningún ciclo de G.*

Corolario 54. *Si G es una gráfica conexa y sin ciclos entonces para toda arista a en $A(G)$, la gráfica $G - a$ está desconectada.*

3.10 Hallando ciclos

Proposición 55. *Si G es una gráfica tal que para todo vértice u de G se tiene que*

$$d_G(u) \geq 2$$

entonces G tiene un ciclo.

Corolario 56. *Consideremos una gráfica G no trivial. Si G es conexa y no posee ciclos entonces hay un vértice de grado uno en G.*

Demostración. Ya que G no es trivial, tiene orden al menos dos. Como G es conexa, todo vértice debe tener grado al menos uno (si hubiese un vértice de grado cero, éste sería un vértice aislado y la gráfica no podría ser conexa). Si todos los vértices tuviesen grado al menos dos, entonces por la proposición **??** existiría un ciclo en G, lo que es imposible. Por lo tanto, G posee (al menos) un vértice de grado uno. □

Proposición 57. *Todo camino cerrado de longitud impar posee un subcamino cerrado que es un ciclo.*

Proposición 58. *Dada una gráfica G y dados dos vértices u y v en G, si existen dos (u, v)-trayectorias diferentes entonces hay un ciclo en G.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que P es la trayectoria de longitud mayor y sean

$$P = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$$

y

$$Q = (y_0, y_1, \ldots, y_q)$$

con $x_0 = y_0 = u$ y $x_p = y_q = v$ las dos (u, v)-trayectorias diferentes. Ya que son diferentes, las sucesiones son diferentes, es decir, existe al menos una entrada en la que difieren. Así, tenemos que

$$A = \{i \colon i \in \{0, \ldots, \text{mín}\{p, \} \text{ y } x_i \neq y_i\} \neq \emptyset.$$

Por el principio del buen orden sabemos que el conjunto A tiene un mínimo, sea

$$a = \text{mín}\, A.$$

Por la definición de las trayectorias, tenemos que $0 \notin A$, por lo que $a > 0$, y ya que es el mínimo, también tenemos que

$$x_{a-1} = y_{a-1}.$$

Es decir, a partir del vértice $x_{a-1} = y_{a-1}$ las trayectorias se separan (podría pasar que $y_{a-1} = u$). Pero en algún momento se deben volver a juntar, ya que $x_p = y_q = v$. Sin embargo, en este caso los índices ya no coinciden como al principio de las trayectorias. Definamos

$$B = \{j \colon j \in \{a + 1, \ldots, p\} \text{ y } x_j \in V(Q)\}.$$

En particular, sabemos que $p \in B$ ya que $x_p = y_q$, por lo tanto $B \neq \emptyset$ y, de nuevo por el principio del buen orden, sabemos que B tiene un elemento mínimo. Sea

$$b = \text{mín}\, B.$$

Por como definimos B, tenemos que $b \geq a + 1$ y ya que b es el mínimo, se sigue que existe $h \in \{a + 1, \ldots, q\}$ tal que

$$x_b = y_h \text{ y } x_{b-1} \notin V(Q).$$

Más aún, $x_c \notin V(Q)$ para todo $c \in \{a+1,\, a+2,\, \ldots,\, b-1\}$, es decir,

$$\{x_{a+1}, x_{a+2}, \ldots, x_{b-1}\} \cap V(Q) = \emptyset.$$

Por lo tanto,

$$C = P[x_{a-1}, x_b] \circ (Q[y_{a-1}, y_h])^{-1}$$

es un ciclo en G. □

3.11 Contando aristas

Si G es una gráfica conexa, ¿cuál es el mínimo número de aristas que debe tener? Mostraremos dos pruebas. La primera es por inducción sobre el orden de la gráfica.

Teorema 59. *Dada una gráfica G de orden n y tamaño m, si G es conexa entonces*

$$m \geq n - 1.$$

Demostración. **Caso base.** Supongamos que G es una gráfica conexa de orden uno. Entonces $G = K_1$, en la cual $n = 1$ y $m = 0$. Ciertamente,

$$0 = m \geq n - 1 = 1 - 1 = 0.$$

En el que caso que G sea una gráfica conexa de orden dos, es fácil ver que $G \cong K_2$ —recordemos que sólo existen dos gráficas de orden dos salvo isomorfismos— y, en tal caso, tenemos que $1 \geq 2 - 1$.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para toda gráfica G' de orden n' y tamaño m' se tiene que si $n' < n$ entonces

$$m' \geq n' - 1.$$

Paso inductivo. Tomemos una gráfica conexa G de orden n y tamaño m. Consideraremos dos casos, dependiendo de si G posee o no un vértice de grado uno.

Primero supongamos que G no posee vértices de grado uno. Es decir, todos los vértices de G tiene grado al menos dos. Por el teorema 7, tenemos que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2n,$$

entonces $2m \geq 2n$, es decir, $m \geq n > n - 1$.

Ahora supongamos que G posee al menos un vértice de grado uno, llamémosle x. Por el teorema 51, $G-x$ es una gráfica conexa. Además, $G' = G-x$ tiene orden $n' = n - 1$ (pues quitamos el vértice x) y tamaño $m' = m - 1$ (pues quitamos la única arista que incide en x). Por lo tanto, G' satisface nuestra hipótesis de inducción, es decir,

$$m' \geq n' - 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} m-1 & \geq & (n-1)-1 \\ m & \geq & n-1. \end{array}$$

□

Las gráficas **conexas** de orden n y tamaño m con $m = n - 1$ no pueden tener ciclos porque, en caso de que tenga al menos uno, podemos quitar una arista del ciclo (como en la proposición 52) y tendríamos una gráfica conexa con $n - 2$ aristas, lo que es imposible. Podemos enunciar este teorema.

Teorema 60. *Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m. Si G es conexa y $m = n - 1$ entonces G no tiene ciclos.*

Es importante señalar que si una gráfica G de orden n tiene al menos $n - 1$ aristas **no necesariamente** G es conexa. Es fácil dar ejemplos de esto.

3.12 Aristas, ciclos y conexidad

Teorema 61. *Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m. Si G es conexa y no posee ciclos entonces*

$$m = n - 1.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el orden n. **Caso base.** Para $n = 1$, la única gráfica conexa y sin ciclos —de hecho, la única gráfica salvo isomorfismos— es K_1, donde $n = 1$ y $m = 0$; claramente, se satisface que $0 = 1 - 1$.

Si deseáramos revisar otros casos pequeños, podríamos considerar $n = 2$ y $n = 3$. Para $n = 2$, la única gráfica conexa y sin ciclos es K_2 —sólo hay dos gráficas de orden dos, salvo isomorfismos, y sólo una de ellas es conexa—, donde $n = 2$ y $m = 1$; claramente, se satisface que $2 = 1 - 1$. Para $n = 3$, sólo hay dos gráficas conexas de orden tres, la trayectoria P_3 y la completa K_3, pero sólo P_3 es acíclica, con $n = 3$ y $m = 2$; claramente, se satisface que $2 = 3 - 1$.

Hipótesis de inducción. Dada una gráfica G' de orden n' y tamaño m', si G' es conexa, acíclica y $n' < n$ entonces $m' = n' - 1$.

Paso inductivo. Supongamos que G conexa y acíclica de orden n y tamaño m. Podemos suponer que $n > 1$ (en caso de $n = 1$, caeríamos en el caso base), así, G no es trivial. Por el corolario 56, G posee un vértice de grado uno, llamémosle u. Definamos $G' = G - u$. La gráfica G' tiene orden $n' = n - 1$ y tamaño $m' = m - 1$. Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$m' = n' - 1,$$

y substituyendo, obtenemos que

$$\begin{aligned} m - 1 &= (n - 1) - 1 \\ m &= n - 1, \end{aligned}$$

que es lo queríamos. $\square$

Teorema 62. *Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m. Si G no posee ciclos y $m = n - 1$ entonces G es conexa.*

Demostración. Supongamos que $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$ son las componentes conexas de G. Por demostrar que $\omega = 1$. Digamos que G_i tiene orden n_i y tamaño m_i, claramente tenemos que $n_1 + n_2 + \cdots n_\omega = n$ y $m_1 + m_2 + \cdots m_\omega = m$. Por otro lado, ya que G no posee ciclos ciclos, cada componente G_i es conexa y no posee ciclos (de poseer algún ciclo, éste también estaría en G) y, por el teorema 61, $m_i = n_i - 1$. Así,

$$m = \sum_{i=1}^{\omega} m_i = \sum_{i=1}^{\omega} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{\omega} n_i - \sum_{i=1}^{\omega} 1 = \sum_{i=1}^{\omega} n_i - \omega = n - \omega.$$

Por otro lado, por hipótesis tenemos $m = n - 1$. Así, $n - 1 = n - \omega$, es decir, $\omega = 1$. Por lo tanto G es conexa. $\square$

Teorema 63. *Consideremos una gráfica G de orden n y tamaño m. La gráfica G es conexa y no posee ciclos entonces si y sólo si para cualquier par de vértices u y v en $V(G)$, existe exactamente una (u, v)-trayectoria.*

3.13 Distancia

Supongamos que G es una gráfica conexa y consideremos dos vértices u y v en G. ¿Será posible decir qué tan cerca o qué tan lejos están u y v? Ya que G es conexa, sabemos que existe al menos una $(u,\, v)$-trayectoria, más aún, cada una de esas trayectorias tiene una longitud y podemos escoger la más corta.

Definición 64 (Distancia)**.** Dados dos vértices u y v en una gráfica conexa G, la *distancia* de u a v se define la mínima de las longitudes de entre todas las $(u,\, v)$-trayectorias en G y la denotamos por $\text{dist}_G(u,\, v)$. Es decir,

$$\text{dist}_G(u, v) = \text{mín}\{l(T)\colon T \text{ es una } (u, v)\text{-trayectoria}\}.$$

Observemos que la distancia es una función cuyo dominio es $V(G) \times V(G)$ y cuyo contradominio son los naturales, incluyendo el cero, es decir:

$$\text{dist}\colon V(G) \times V(G) \to \mathbb{N}.$$

De la definición de distancia, tenemos que si dados dos vértices u y v (no necesariamente distintos) en una gráfica G, su distancia es k entonces existe una trayectoria T en G de longitud k, es decir, sabemos que existe

$$T = (x_0, x_1, \ldots, x_k),$$

con $x_0 = u$ y $x_k = v$, la cual además es de longitud mínima. Lo que nos asegura que para cualquier par de enteros i y j en $\{0,\, 1,\, \ldots,\, k\}$ tales que

$$|j - i| \geq 2$$

tenemos que no hay arista entre x_i y x_j en G.

Nota. ¿Qué significa que

$$|j - i| \geq 2?$$

Significa que i y j son dos enteros que están **alejados** al menos en dos pasos (o que hay al menos un número entre ellos). En término de los vértices, significa que entre el vértice x_i y el vértice x_j (sin importarnos cuál aparece primero o cuál está a la izquierda y cuál a la derecha) hay al menos otro vértice.

¿Qué nos dicen los $(u,\, v)$-caminos o las $(u,\, v)$-trayectorias de la distancia de u a v? Nos dan una cota. Si sabemos que existe un $(u,\, v)$-camino C de longitud k hay dos posibilidades: que C sea la trayectoria más corta de u a v y, por lo tanto, $\mathrm{dist}_G(u,\, v) = k$ o que haya una más corta, pero en tal caso tendríamos que $\mathrm{dist}_G(u,\, v) \leq k$. En ambos casos tenemos que

$$\mathrm{dist}_G(u, v) \leq k.$$

¿Cuál será la distancia de un vértice a sí mismo, es decir, $\mathrm{dist}_G(u,\, u)$? Recordemos que sólo existe una trayectoria de un vértice a sí mismo: la trayectoria trivial, es decir, (u). Y su longitud es cero. Por lo tanto, tenemos que para todo vértice u en G,

$$\mathrm{dist}_G(u, u) = 0.$$

La pregunta recíproca sería: si la distancia entre dos vértices u y v es cero, ¿u y v son iguales? Ya que $\mathrm{dist}_G(u,\, v) = 0$, tenemos que existe la trayectoria

$$T = (x_0, x_1, \ldots, x_k),$$

con $x_0 = u$ y $x_k = v$. Pero $k = 0$, por lo tanto $x_0 = x_k$, es decir, $u = v$.

La distancia no depende del sentido de la trayectoria, es decir, para cualesquiera dos vértices u y v, se tiene que

$$\mathrm{dist}_G(u, v) = \mathrm{dist}_G(v, u).$$

Para ver que esto es cierto, supongamos que $d_G(u,\, v) = k$, para algún entero no-negativo k. Es decir, existe una $(u,\, v)$-trayectoria T:

$$T = (u = x_0, x_1, \ldots, x_k = v).$$

Ya que ahora queremos determinar la distancia de v a u, $d_G(v,\, u)$, por la definición debemos considerar trayectorias que vayan de v a u. La posibilidad más inmediata sería considerar la trayectoria T pero recorrida al revés, es decir,

$$T^{-1} = (v = x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0 = u).$$

La $(v,\, u)$-trayectoria T^{-1} tiene longitud k pero ¿cómo sabemos que no existe otra $(v,\, u)$-trayectoria más corta? Hasta el momento sólo podemos asegurar que

$$\mathrm{dist}_G(v, u) \leq k.$$

Procederemos por contradicción. En el peor de los casos, existiría una trayectoria más corta de v a u,

$$T' = (v = y_0, y_1, \ldots, y_h = u)$$

de longitud h con $h < k$ (esta trayectoria implicaría que $d_G(v,\, u) \leq h < k$). Pero podríamos repetir lo que ya hicimos, es decir, recorrer T' en sentido contrario para obtener una $(u,\, v)$-trayectoria:

$$(T')^{-1} = (u = y_h, y_{h-1}, \ldots, y_1, y_0).$$

La $(u,\, v)$-trayectoria $(T')^{-1}$ tiene longitud h pero entonces $d_G(u,\, v) \leq h < k$, lo que es una contradicción. La contradicción aparece cuando supusimos que existía una $(v,\, u)$-trayectoria más corta que T^{-1}. Por lo tanto, no existen $(v,\, u)$-trayectorias de longitud menor que k, es decir,

$$\text{dist}_G(v, u) = k.$$

Finalmente, consideremos tres vértices u, v y w en una gráfica conexa G. Siempre se tiene la siguiente desigualdad:

$$\text{dist}_G(u, w) \leq \text{dist}_G(u, v) + \text{dist}_G(v, w).$$

Lo cual tiene sentido, $\text{dist}_G(u,\, w)$ es la medida de la forma más corta de llegar desde u hasta w. Si nos desviamos por v, en el mejor de los casos es una de las formas cortas de llegar desde u hasta w y, en el peor, tomaría más tiempo pero no es posible que nos dé un camino más corto que $\text{dist}_G(u,\, v)$.

Formalmente, existe una $(u,\, v)$-trayectoria T_1 de longitud $\text{dist}_G(u,\, v)$ y una $(v,\, w)$-trayectoria T_2 de longitud $\text{dist}_G(v,\, w)$. Al concatenarlas, obtendríamos un $(u,\, w)$-camino

$$T = T_1 \circ T_2$$

de longitud $\text{dist}_G(u,\ v) + \text{dist}_G(v,\ w)$. Como argumentamos arriba, esto implica que

$$\text{dist}_G(u, w) \leq l(T).$$

En abstracto, dado un conjunto X, una función

$$\text{dist}\colon X \times X \to [0, \infty)$$

es una *función de distancia* o, simplemente, una *distancia*. Si además satisface las siguiente tres propiedades:

1. $\text{dist}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, para cualesquiera x y y en X,
2. $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(y, x)$, para cualesquiera x y y en X y
3. $\text{dist}(x, w) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, w)$ para cualesquiera x, y y z en X (la *desigualdad del triángulo*)

entonces decimos que d es una *métrica* y (X, dist) es un *espacio métrico.*

Por todo lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 65. *Si G es una gráfica conexa entonces $(V(G), \text{dist}_G)$ es un espacio métrico.*

Es importante señalar que la función distancia que definimos arriba no es la única función de distancia que se puede definir en una gráfica e, con ciertas adecuaciones, podríamos incluso extenderla para gráficas en general (es decir, incluyendo las que no son conexas).

3.14 Excentricidad, diámetro y radio

La distancia nos permitirá determinar qué tan *extendida* es una gráfica conexa (es decir, qué tan alejados están los vértices entre sí). Si tomamos un vértice u, podemos calcular cuál es la distancia de ese vértice a cada uno del resto de los vértices. La distancia a sí mismo es cero y la distancia a cada uno de sus vecinos es uno, lo interesante es saber cuál es la distancia al vértice **más alejado** de u

Definición 66 (Excentricidad de un vértice)**.** Dado un vértice u en una gráfica conexa G, la *excentricidad* de u es la distancia al vértice de G que está más alejado de u y la denotamos por $\text{exc}_G(u)$. Dicho de otra manera,

$$\text{exc}_G(u) = \text{mín}\{\text{dist}_G(u, v) \colon v \in V(G)\}.$$

El diámetro de una gráfica será el peor de los casos posibles, es decir, la mayor distancia que puedan alcanzar dos vértices entre sí (de entre todas las posibles parejas de vértices en la gráfica).

Definición 67 (Diámetro de una gráfica)**.** Dada una gráfica conexa G, la *diámetro* de G es la distancia de los dos vértices que están más alejados en G y la denotamos como $\text{exc}(G)$. Es decir,

$$\text{diám}(G) = \text{máx}\{\text{dist}_G(u, v) \colon u, v \in V(G)\}.$$

No es difícil ver que se cumple la siguiente igualdad

$$\text{diám}(G) = \text{máx}\{\text{exc}_G(u) \colon u \in V(G)\}.$$

Definición 68 (Radio de una gráfica)**.** Dada una gráfica G, el *radio* de G es la mínima de las excentricidades y se denota por $\text{rad}(G)$. Es decir,

$$\text{rad}(G) = \text{mín}\{\text{exc}_G(u) \colon u \in V(G)\}.$$

Los siguientes argumentos pueden ser, por momentos, confusos. Sin embargo, son una muestra de algunos que se presentan en Cálculo y en Análisis.

Consideremos una gráfica conexa G. Si tomamos un vértice u en G, digamos que su excentricidad es

$$\text{exc}_G(u) = k.$$

Esto quiere decir que existe un vértice u' en G, tal que

$$\text{dist}_G(u, u') = k.$$

Más aún, para cualquier otro vértice x en G, se cumple que

$$0 \leq \text{dist}_G(u, x) \leq e_G(u).$$

Si, en cambio, sabemos que $\text{exc}(G) = k$ entonces existen dos vértices u y v tales que

$$\text{dist}_G(u, v) = k$$

y para cualquier par de vértices x y y, tenemos que

$$\text{dist}_G(x, y) \leq \text{dist}_G(u, v).$$

Si **fijamos** x, tenemos que para cualquier vértice y en G,

$$\text{dist}_G(x, y) \leq \text{dist}_G(u, v)$$

y como sabemos que para cualquier vértice y en G, se tiene que

$$\text{dist}_G(x, y) \leq \text{exc}_G(x).$$

De forma análoga a las esferas, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 69. *Dada una gráfica G,*

$$\operatorname{rad}(G) \leq \operatorname{diám}(G) \leq 2\operatorname{rad}(G).$$

Demostración. La primer desigualdad se sigue por **definición** de radio y diámetro. Quedaría por demostrar $\operatorname{diám}(G) \leq 2\operatorname{rad}(G)$. Por definición de diámetro, existe un vértice x tal que

$$\operatorname{diám}(G) = \operatorname{exc}_G(x),$$

para cualquier otro vértice u en $V(G)$ tenemos que

$$\operatorname{exc}_G(x) \geq \operatorname{exc}_G(u) \text{ y}$$

por la definición de excentricidad existe un vértice y tal que

$$\operatorname{exc}_G(x) = \operatorname{dist}_G(x, y).$$

Por otro lado, por la definición de radio tenemos que existe un vértice z tal que

$$\operatorname{rad}(G) = \operatorname{exc}_G(z) \text{ y}$$

ya que es el mínimo, para todo vértice u se tiene que

$$\operatorname{rad}(G) = \operatorname{exc}_G(z) \leq \operatorname{exc}_G(u).$$

Más aún, tenemos que

$$\operatorname{dist}_G(x, z) \leq \operatorname{exc}_G(z),$$
$$\operatorname{dist}_G(z, y) \leq \operatorname{exc}_G(z) \text{ y}$$
$$\operatorname{exc}_G(x) = \operatorname{dist}_G(x, y) \leq \operatorname{dist}_G(x, z) + \operatorname{dist}_G(z, y) \leq 2\operatorname{exc}_G(z) = 2\operatorname{rad}(G).$$

□

3.15 Centro y periferia

Dada una gráfica G, un vértice u es *central* si

$$\operatorname{exc}_G(u) = \operatorname{rad}(G) \text{ y}$$

u es *periférico* si

$$\operatorname{exc}_G(u) = \operatorname{diám}(G).$$

La subgráfica de G inducida por sus vértices centrales es el *centro* de G, la denotamos por $\operatorname{cen}(G)$, y la subgráfica de G inducida por sus vértices periféricos es la *periferia* de G, la denotamos por $per(G)$.

Ejercicios

1. Considera una gráfica G de orden n y tamaño m. Si G no es conexa entonces
$$m \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$
2. Prueba que todo paseo cerrado posee un subcamino que es un ciclo.

Capítulo 4

Árboles

Una gráfica G es un *árbol* si G es conexa y acíclica, es decir, no tiene ciclos. ¿Quiénes son árboles? Por ejemplo, las gráficas completas de uno y dos vértices, K_1 y K_2, son árboles. Pero la de orden tres, K_3, no es un árbol porque posee un ciclo. Más aún, para toda $n \geq 3$, la gráfica completa de orden n, K_n, no es un árbol porque posee muchos ciclos. Podríamos incluso pensar que si G tiene muchas aristas (con respecto al número de vértices que posee) entonces es *poco probable* que G sea un árbol. Pero, por otro lado, si la gráfica tiene pocas aristas también es poco probable que sea árbol.

En principio, para que una gráfica sea un árbol debe de ser conexa.

Capítulo 5

Conjuntos recursivos en gráficas

Los *conjuntos recursivos* son un tipo muy especial de conjuntos que se definen recursivamente. Esto es, aplicando una «operación» una y otra vez.

Ejemplo 6. Consideremos dos gráficas $G = (V(G), A(G))$ y $H = (V(H), A(H))$. Diremos que G es una $\mathcal{T}$*-sucesora* de H si:

- H es una subgráfica de G,
- G tiene un vértice de grado, digamos u y
- $G - u = H$.

Es decir, podemos decir G se obtiene a partir de H al agregarle un nuevo vértice de grado uno.

Definiremos recursivamente el conjunto de gráficas $\mathcal{T}$:

1. K_1 está en $\mathcal{T}$.
2. Dada una gráfica G, si existe una gráfica H en $\mathcal{T}$ tal que G es una $\mathcal{T}$-sucesora de H entonces G también está en $\mathcal{T}$.

Para cualquier gráfica G que tomemos en $\mathcal{T}$, le

¿Qué propiedades tienen las gráficas en la familia $\mathcal{T}$? No es difícil darse cuenta de dos cosas, todas las gráficas T en $\mathcal{T}$:
1. son conexas y
2. no tienen ciclos.

Probaremos ambas propiedades.

Proposición 70. *Si G está en la familia $\mathcal{T}$ entonces G es conexa.*

Demostración. A □

Ejemplo 7. Dados dos números naturales p y q, diremos que q es $\mathcal{M}$-*sucesor* de p si

$$p = q + 2.$$

Por ejemplo, el número ocho es $\mathcal{M}$-sucesor del número seis y el número cinco es $\mathcal{M}$-sucesor del número tres.

La relación «predecesor» es la simétrica de «sucesor», así podemos decir que p es $\mathcal{M}$-*predecesor* de q si q es $\mathcal{M}$-sucesor de p.

Así, el número seis es $\mathcal{M}$-predecesor del número ocho y el número tres es $\mathcal{M}$-predecesor del número cinco.

Definiremos recursivamente el conjunto de números $\mathcal{M}$:

1. El número 1 está en $\mathcal{M}$.

2. Si p está en $\mathcal{M}$ y q es $\mathcal{M}$-sucesor de p entonces q está en $\mathcal{M}$.

Ya que el número uno está en $\mathcal{M}$, el número $3 = 1 + 2$ también está en $\mathcal{M}$. Y los números 5, 7, 9, ..., pareciera que $\mathcal{M}$ es el conjunto de todos los números naturales impares. Si quisiéramos probarlo, tenemos que mostrar dos cosas:

1. Que todo lo que está en $\mathcal{M}$ es un número natural impar. Es decir, si $p \in \mathcal{M}$ entonces $p = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$.

2. Si p es un número natural impar entonces $p \in \mathcal{M}$.

El primer inciso muestra que todos los que viven en $\mathcal{M}$ son impares, es decir, que $\mathcal{M}$ es un subconjunto de los números naturales impares. El segundo inciso muestra la otra contención, es decir, que los números naturales impares son un subconjunto de $\mathcal{M}$.

Es muy importante señalar lo siguiente: para cada elemento q en $\mathcal{M}$, existen dos posibilidades:

1. $q = 1$ y, por la primera parte de la definición es que p está en $\mathcal{M}$ o

2. $q \neq 1$, en este caso, necesariamente existe un $p \in \mathcal{M}$ tal que q es $\mathcal{M}$-sucesor de p y es por la segunda partes de la definición que p está en $\mathcal{M}$.

Para simplificar la notación, definamos

$$\mathbb{M} = \{2k + 1 \colon k \in \mathbb{N}\}.$$

Proposición 71. $\mathcal{M} = \mathbb{M}$.

Demostración. Primero probemos que $\mathcal{M} \supseteq \mathbb{M}$. Es decir, tomemos un elementos p en $\mathbb{M}$ y veamos que también está en $\mathcal{M}$.

Como $p \in \mathbb{M}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2k + 1$. Probaremos que $p \in \mathcal{M}$ por inducción sobre k.

Paso base. Cuando $k = 0$. En tal caso, $p = 0k + 1 = 1$ Por la definición de $\mathcal{M}$, sabemos que $1 \in \mathcal{M}$.

Hipótesis inductiva. Supongamos que para k, $p' = 2k + 1 \in \mathcal{M}$.

Paso inductivo. Probemos que para $k + 1$, $p = 2(k + 1) + 1 \in \mathcal{M}$. Según la definición de $\mathcal{M}$, para asegurar que p está en $\mathcal{M}$ debemos mostrar que existe un q en $\mathcal{M}$ tal que p es $\mathcal{M}$-sucesor de q.

Es claro que $2(k + 1) + 1$ es $\mathcal{M}$-sucesor de $2k + 1$, ya que:

$$(2k + 1) + 2 = (2k + 2) + 1 = 2(k + 1) + 1.$$

Y por hipótesis $p' = 2k + 1$ está en $\mathcal{M}$. Por lo tanto,

$$p = 2(k + 1) + 1 \in \mathcal{M}.$$

Ahora probemos que $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{M}$. Es decir, tomemos un elementos p en $\mathcal{M}$ y veamos que también está en $\mathbb{M}$.

Ya que $p \in \mathcal{M}$, como señalamos anteriormente: $p = 1$ o existe un $\mathcal{M}$-predecesor de p que está en $\mathcal{M}$.

Paso base. Cuando $p = 1$. En tal caso, para $k = 0$ tenemos que $p = 2k + 1$. Por lo tanto, $p \in \mathbb{M}$.

Hipótesis inductiva. Supongamos que para p, los $\mathcal{M}$-predecesores de p están en $\mathbb{M}$ (en este caso sólo el $\mathcal{M}$-predecesor será único pero eso no siempre pasa, no lo hemos probado y en realidad no es relevante para la prueba).

Paso inductivo. Probemos que p está en $\mathbb{M}$. Sólo sabemos que los $\mathcal{M}$-predecesores de p están en $\mathbb{M}$. ¿Quién es un $\mathcal{M}$-predecesor de p? Fácil, $p' = p - 2$ (y, sin dudas, $p' + 2 = p$). Por hipótesis inducutiva, $p' \in \mathbb{M}$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p' = 2k + 1$. Tenemos que

$$p = p' + 2 = (2k + 1) + 2 = (2k + 2) + 1 = 2(k + 1) + 2,$$

por lo tanto $p \in \mathbb{M}$, que es lo que queríamos mostrar. □

5.0.1 Subdivisión de aristas

Dadas una gráfica $G = (V(G), A(G))$ y una arista $e = xy$ en $A(G)$ (y, para evitar inconsistencias en la definición, supongamos que $v_e \notin V(G)$), la gráfica resultante de *subdividir la arista* e de G es

$$G' = (V(G) \cup \{v_e\}, (A(G) \setminus \{e\}) \cup \{xv_e, v_ey\}).$$

Dada una gráfica G, definamos el conjunto recursivo $\mathcal{D}(G)$ como:

1. La gráfica G está en $\mathcal{D}(G)$.
2. Si la gráfica F está en $\mathcal{D}(G)$ y H es el resultado de subdividir una arista de F entonces F está en $\mathcal{D}(G)$.

Podemos decir algunas cosas sobre los conjuntos $\mathcal{D}(G)$, las cuales dependen de quién sea G. Pero antes necesitamos introducir un poco de notación. Supongamos que F y H son dos gráficas tales que H se obtiene a partir de subdividir una arista de F, diremos que H es una $\mathcal{D}$-*sucesora* de F y, análogamente, que F es una $\mathcal{D}$-*predecesora* de H.

Proposición 72. $|\mathcal{D}(K_1)| = 1$.

Proposición 73. $\mathcal{D}(K_3)$ *es el conjunto de todos los ciclos.*

Demostración. Sabemos que para número natural n con $n \geq 3$ existe la gráfica que consta de un ciclo de esa longitud, es decir,

$$C_n = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{v_iv_{i+1} \colon i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{v_nv_1\}).$$

Tenemos que probar dos cosas:

1. Que todos los elementos en $\mathcal{D}(K_3)$ sean ciclos.
2. Que para todo natural n con $n \geq 3$, tenemos que
$$C_n \in \mathcal{D}(K_3).$$

Ahora probemos que si G está en $\mathcal{D}(K_3)$ entonces G es un ciclo. Recordemos que, ya que G está en $\mathcal{D}(K_3)$, hay dos opciones: G es K_3 o existe F en $\mathcal{D}(K_3)$ tal que G es el resultado de subdividir una arista de F.

Caso base. Supongamos que $G = K_3$. En tal caso, $G = K_3 = C_3$, que es lo que queríamos.

Hipótesis inductiva. Supongamos que dada una gráfica F en $\mathcal{D}(K_3)$, si la gráfica H en $\mathcal{D}(K_3)$ es una $\mathcal{D}$-predecesora de F entonces H es un ciclo.

Paso inductivo. Por demostrar que F es un ciclo. Sabemos que H es $\mathcal{D}$-predecesora de F y sabemos que H sí es un ciclo, es decir, existe un número natural k con $k \geq 3$ tal que $F = C_k$.

¿Cuántas gráficas no isomorfas se obtendrán de subdividir una arista de C_k? No es difícil ver que todas son isomorfas a C_{k+1}. Lo podemos probar con detalle (pero es mucho más fácil si lo dibujamos). Sabemos que

$$C_k = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} \colon i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{v_n v_1\}).$$

Tomemos dos aristas $a = v_p v_{p+1}$ y $b = v_q v_{q+1}$ diferentes de C_n. Necesariamente $p < q$ o $p > q$ y ambos casos son análogos; así, sin pérdida de general podemos suponer que $p < q$. Consideremos la gráfica que obtenemos al subdividir la arista a y la que obtenemos al subdividir la arista b.

$$\begin{aligned} C_a = (\{&v_1, \ldots, v_p, v_a, v_{p+1}, \ldots, v_q, v_{q+1}, \ldots v_n\}, \\ &\qquad\qquad\qquad\{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{p-1} v_p, v_p v_a, v_a v_{p+1}\}) \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = u_0 &C_1[v_0, v_{i-1}] C_0[u_{j+i-1}, u_j] C_1[v_j, v_{j+i-1}] C_0[u_{2j+i-1}, u_{2j}] \\ &C_1[v_{2j}, v_{2j+i-1}] \cdots C_1[v_{((n/i)-1)j}, v_{((n/i)-1)j+i-1}] C_0[u_{(n/i)j+i-1}, u_{(n/i)j}], \end{aligned}$$

$$C_a = (\{v_1, \ldots, v_p, v_a, v_{p+1}, \ldots, v_q, v_{q+1}, \ldots v_n\}, \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{p-1} v_p, v_p v_a, v_a v_{p+1}\}) \text{ y}$$

$$C_a = (\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_a, v_{p+1}, \ldots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} \colon i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{v_n v_1\}).$$

□

5.1 Árboles generadores

Los árboles son las gráficas más pequeñas, en términos de sus tamaños, que son conexas. Y, mas aún, siempre podemos encontrar ciertos árboles como subgráficas de cualquier gráfica conexa. Recordemos que si H es una subgráfica de G, decimos que H es generadora si tiene los mismos vértices que G, es decir, si $V(H) = V(G)$. Y si T es una subgráfica de G que es conexa y acíclica, sería un *subárbol* de G. Así, podemos definir:

Definición 74 (Subárbol generador)**.** Dada una gráfica conexa G, una subgráfica T de G es un *subárbol generador* de G si satisface que:

1. T es una subgráfica generadora de G y
2. T es un árbol.

Toda gráfica conexa G posee un subárbol generador[1]. La idea para probarlo consiste en ir *rompiendo* los ciclos. Si G no posee ciclos entonces G es conexa y acíclica, es decir, G es un árbol y, además, toda gráfica es subgráfica de sí misma. Por lo tanto, G sería subárbol generador de G.

¿Qué pasa si G tiene ciclos? Ya sabemos, por la proposición 52, que al quitar una arista que no está en un ciclo, la gráfica no se desconecta. Ya que estamos suponiendo que G tiene ciclos, existe una arista a en G que está en un ciclo. Así, $G - a$ es una subgráfica de G que es conexa y, más aún, tiene *al menos* un ciclo menos que G. ¿Importa qué arista del ciclo quitemos? No, sólo que al quitar aristas diferentes obtendremos subgráficas diferentes.

Todo lo anterior sugiere usar inducción para la prueba (sobre el orden de las aristas).

Teorema 75. *Consideremos una gráfica G. Si G es conexa entonces G posee un subárbol generador.*

En esta prueba no podemos iniciar con cero o una aristas, el caso base será cuando G tenga $n-1$ aristas (es decir, cuando G ya es un árbol).

Demostración. Supongamos que G tiene orden n y tamaño m y procedamos por inducción sobre el tamaño de G.

Caso base. Si $m = n - 1$.

Por el teorema 60 sabemos que G es un árbol y toda gráfica es subgráfica generadora de sí misma, por lo tanto G es su propio subárbol generador.

Hipótesis de inducción. Para un entero positivo m con $m > n - 1$, supongamos que toda gráfica conexa de G' de orden n y tamaño m', con $m' < m$, posee un subárbol generador.

[1]Es necesario pedir que sea conexa, ya que si la gráfica no fuese conexa, no podríamos tener una subgráfica que sea simultáneamente conexa y generadora.

Tenemos que G es una gráfica de orden n y tamaño m. Ya que $m > n-1$, por el teorema **??**, G posee al menos un ciclo, sea a una arista en dicho ciclo. Por la proposición **??**, $G - a$ es una subgráfica generadora y conexa de G y, más aún, $G - a$ tiene orden n y tamaño $m - 1$. Por hipótesis inductiva, G posee una subárbol generador, llamémosle T.

Bastaría con mostrar que T también es un subárbol generador de G. Ya que T es subárbol generador de $G - a$, tenemos que

$$V(T) = V(G - a).$$

Y ya que $G - a$ es subgráfica generadora de G, tenemos que

$$V(G - a) = V(T),$$

por lo tanto se sigue que T es una subgráfica generadora de G y también es un árbol, es decir, es un subárbol generador de G. $\square$

En términos prácticos, encontrar un árbol generador en una gráfica conexa G es un proceso recursivo que consiste en encontrar un ciclo, escoger una de sus aristas y quitársela y repetir el procedimiento hasta que la gráfica ya no tenga ciclos.

Capítulo 6

Conexidad I: Puntos de corte

Recordemos que una gráfica es conexa si es *sólo una pieza*. Formalmente, una gráfica G es conexa si para cualquier par de vértices u y v de G, siempre existe un (u, v)-camino. Ya que toda trayectoria es un camino y que todo (u, v)-camino posee una subcamino que es una (u, v)-trayectoria, también podemos decir que una gráfica G es conexa y si sólo si para cualquier par de vértices u y v de G, existe una (u, v)-trayectoria. Si una gráfica es inconexa (es decir, no es conexa), sabemos que dicha gráfica posee al menos dos componentes y si nos tomamos un vértice en cada una de esas dos componentes, no habrá ningún camino ni trayectoria entre ellos.

Si bien una gráfica es o no conexa, entre gráficas conexas hay una noción de ser *más conexa* o *menos conexa*. Por ejemplo, pensemos en la trayectoria de orden cinco P_5, en el ciclo de orden cinco C_5 y en la gráfica completa de orden cinco K_5. Podemos afirmar que P_5 es menos conexa que C_5 y que C_5 es menos conexa que K_5.

6.1 Vértices de corte

Daremos un criterio inicial para decir que una gráfica sea más conexa que otra. Por ejemplo, en la gráfica P_5 hay (al menos) un vértice que, al quitarlo, nos queda una gráfica inconexa. En cambio, no importa qué vértice le quitemos a C_5 o a K_5, lo que nos queda seguirá siendo conexo.

Definición 76. Dado un vértice u en una gráfica conexa G, el vértice u es un vértice *de corte* si $G - u$ no es conexa[1]. A veces también se los llama

[1] Recordemos que $G - u$ es la subgráfica inducida $G[V(G) \setminus \{u\}]$.

puntos de corte.

Dadas dos gráficas conexas, podríamos esperar que aquélla que no tiene vértices de corte está más conectada que la que sí los tiene.

Hay un dicho que dice que una cadena se rompe en su eslabón más débil. En este caso, los vértices de corte serían los eslabones más débiles y podemos dar la siguiente caracterización.

Teorema 77. *Consideremos una gráfica conexa G y un vértice u en G. El vértice u es de corte si y sólo existen dos vértices v y w en G, diferentes de u, tales que toda (v, w)-trayectoria pasa por el vértice u.*

Demostración. Primero supongamos que u es un vértice de corte en una gráfica conexa G. Debemos mostrar que existen dos vértices v y w, diferentes de u, tales que toda (v, w)-trayectoria pasa por u.

Como $G - u$ es conexa, debe poseer al menos dos componentes. Así, podemos escoger dos vértices de $G - u$ que estén en componentes distintas, llamémosles v y w. Ya que estos vértices están en componentes diferentes de $G - u$, no existen (v, w)-trayectorias en $G - u$. Pero en G si hay (v, w)-trayectorias porque G es conexa. Por lo tanto, todas las (v, w)-trayectorias necesariamente deben pasar por u. Hemos probado la ida.

Ahora supongamos que existen dos vértices v y w y un vértice u, diferente de v y w, tales que toda (v, w)-trayectoria pasa por u. Por demostrar que u es un vértice de corte, es decir, que la gráfica $G - u$ es inconexa.

No existe ninguna (v, w)-trayectoria en $G - u$. Por lo tanto, v y w están en componentes conexas distintas de $G - u$, es decir, ésta es inconexa. Por lo tanto u es un vértice de corte. □

Definición 78. Una gráfica conexa G es *no-separable* si no posee vértices de corte.

¿Qué gráficas son no-separables? La más fácil es K_1, ya que sólo podríamos quitarle un vértice pero lo que nos queda ya no es gráfica (y menos una gráfica inconexa). La siguiente sería K_2; al quitarle cualquier vértice nos queda una gráfica isomorfa a K_1 que es conexa.

¿Qué pasa con las gráficas de orden al menos tres? Hay dos gráficas conexas de orden tres, salvo isomorfismos: la gráfica completa de orden tres K_3 y la trayectoria de orden tres P_3. Al quitarle cualquier vértice a K_3 nos queda una gráfica isomorfa a K_2; por lo tanto, K_3 es no separable. Pero P_3

tiene un vértice que, al quitarlo, la gráfica que nos queda es inconexa. Por lo tanto P_3 tiene vértices de corte y no es no-separable.

En el teorema 51 probamos que dada una gráfica conexa G y un vértice u en G, si $d_G(u) = 1$ entonces $G - u$ seguía siendo conexa. Por lo tanto, ningún vértice de grado uno puede ser de corte.

Por otro lado, si u es un vértice de corte en una gráfica G entonces $d_G(u) \geq 2$.

Proposición 79. *Dado un vértice u en una gráfica G, si u es de corte en G entonces*

$$d_G(u) \geq 2.$$

¿Los árboles tiene vértices de corte? Por lo que acabamos de argumentar, ni K_1 ni K_2 tienen vértices de corte. El único árbol de orden tres es P_3, la cual sí tiene vértices de corte. Más aún, ninguna hoja (los vértices de grado uno) en un árbol son de corte. ¿Cuáles vértices sí son de corte en un árbol? Pareciera que aquéllos vértices que no tienen grado cero ni uno, es decir, que tienen grado al menos dos. Esto no siempre pasa (por ejemplo, piensa en los grados de los vértices de un ciclo y en qué pasa cuando le quitamos sólo un vértice).

La siguiente prueba ilustra muy bien lo que (en general) queremos hacer para probar que una gráfica se desconecta: encontrar dos vértices que no están en componentes distintas.

Proposición 80. *Dado un vértice u en un árbol T, si $d_T(u) \geq 2$ entonces u es un vértice de corte.*

Demostración. Ya que $d_T(u) \geq 2$, existen dos vértices distintos x y y que son vecinos de u. Sabemos que existe la (x, y)-trayectoria (x, u, y). Por el teorema 63, la trayectoria es única. Así, en $T - u$ no existen (x, y)-trayectorias. Por lo tanto, del teorema 77 se sigue que u es un vértice de corte. □

Finalmente, ya sabemos que si u es un vértice de corte en G entonces $G - u$ tiene al menos dos componentes pero ¿cuántas componentes puede tener a lo más?

Antes de responder eso, tendríamos que preguntarnos sobre el número de componentes en una gráfica arbitraria (también decimos «en una gráfica en general») F. Si F es conexa, entonces sólo tiene una componente. Si no es conexa, tendrá al menos dos componentes. Entre más pequeñas sean las componentes, más componentes tendrá F. ¿Cuál es el orden de la componente más pequeña? Es lo mismo que preguntarse ¿cuál es el orden de la gráfica conexa más pequeña? La gráfica conexa más pequeña es K_1. Así, el menor orden que puede tener una componente es uno. Por lo tanto, el mayor número de componentes que puede tener una gráfica F de orden n son n componentes (en tal caso, ¿cuál es su tamaño?).

Regresando a nuestro problema anterior en el que G era una gráfica y u era un vértice de corte de G, supongamos que G tiene orden n. Por lo tanto, $G - u$ puede tener a lo más $n - 1$ componentes. ¿Cómo debe de ser G para que eso suceda?

6.2 Puentes

Podemos pensar en aristas que hacen lo mismo que los vértices de corte. Así tenemos:

Definición 81. Dada una arista a en una gráfica conexa G, decimos que a es un *puente* (o *arista de corte*) si $G - a$ es inconexa[2].

¿Qué gráficas poseen aristas de corte? Obviamente K_1 no puede poseer aristas de corte —pues no tiene aristas—. ¿Y qué pasa con respecto a K_2? Como dijimos arriba, K_2 no tiene vértices de corte pero la única arista que posee sí es un puente. La gráfica K_3 no posee ni vértices ni puentes. La trayectoria de orden tres, P_3 tiene tanto vértices como puentes (tiene dos puentes y un vértice de corte). De las once gráficas de orden once, seis son conexas —las gráficas que nos interesan por el momento— y sólo tres tienen vértices de corte y puentes. Curiosamente, no hay una gráfica de orden cuatro que tenga vértices de corte pero no puentes o que tenga puentes pero no vértices de corte. ¿Cuántas gráficas de orden cinco tendrán vértices de corte o puentes?

Al igual que como hicimos con los vértices de corte, podemos caracterizar los puentes:

Teorema 82. *Consideremos una gráfica conexa G y un arista a en G. La arista a es un puente si y sólo existen dos vértices v y w en G, tales que toda (v, w)-trayectoria pasa por la arista a.*

[2] Recordemos que $G - a$ es la gráfica $(V(G), A(G) \setminus \{a\})$.

La prueba es muy parecida a la del teorema 77, por lo que es más apropiada dejarla como ejercicio.

Sin embargo, ya conocemos otra caracterización que es la contrapositiva de la proposición 52 (y, por tanto, podemos dar por probada):

Proposición 83. *Dados una gráfica conexa G y una arista a de G, $G - a$ es inconexa si y sólo si la arista a no está en ningún ciclo de G.*

¿Cuántas componentes tiene $G-a$? Ya que $G-a$ es inconexa, debe tener al menos dos componentes. Pero recordemos que $G-a$ tiene el mismo orden que G, no resulta difícil darse cuenta —tal vez después de algunos ejemplos— que $G - a$ tiene exactamente dos componentes. Si suponemos que $a = uv$, ya que G es conexa sabemos que para cualquier otro vértice x en G, existe tanto una (x, u)- como una (x, v)-trayectoria. Pero resulta que sólo una de esas dos trayectorias no pasa por la arista a y la otra necesariamente pasa por la arista a.

Proposición 84. *Dada una arista a en una gráfica conexa G, si a es un puente entonces $G - a$ tiene exactamente dos componentes.*

Demostración. Supongamos que $a = uv$ y consideremos los siguientes conjuntos:

$$U = \{x \colon x \in V(G) \text{ y existe una } (x, u)\text{-tray. que no pasa por la arista } a\}$$

y

$$V = \{x \colon x \in V(G) \text{ y existe una } (x, v)\text{-tray. que no pasa por la arista } a\}.$$

Faltaría por probar que $\{U, V\}$ es una partición de $V(G)$ y que las componentes de $G - a$ son exactamente $G[U]$ y $G[V]$, lo cual bien puede quedarse como ejercicio. ☐

6.3 Vértices de corte y puentes

La existencia de vértices de corte no implica la existencia de puentes; por ejemplo, si piensas en dos ciclos pegados en un vértice, dicha gráfica tendrá un vértice de corte pero no importa qué arista le quitemos, no dejará de ser conexa. Podemos generalizar la idea anterior si tomamos un conjunto y algunos pares de esos ciclos los pegamos en un vértice (cuidando que no se forme un «ciclo de ciclos»), esta gráfica tendrá muchos vértices de corte pero ningún puente.

Por el contrario, de todos los ejemplos de gráficas con puentes que conocemos, todos excepto uno poseen vértices de corte. El único ejemplo que falla es aquél que no tiene los vértices suficientes para tener vértices de corte, la gráfica completa de orden dos K_2. Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 85. *Si G es una gráfica conexa de orden al menos tres y tiene un puente entonces G tiene vértices de corte.*

Demostración. Sea a un puente en la gráfica G y supongamos que $a = uv$. Los vértices u y v son buenos candidatos para ser vértices de corte pero no cualquiera de los funciona. Podría pasar que $d_G(u) = 1$ y, en este caso, la arista uv siempre será un puente pero el vértice u nunca será un vértice de corte. Nos queda por probar dos cosas: (i) que los extremos las aristas que son puente y que tienen grado al menos dos son vértices de corte y (ii) que la arista uv tiene al menos un extremo de grado al menos dos.

Para probar (i), sabemos que $a = uv$ es una arista de corte y supongamos que v satisface que $d_G(v) \geq 2$, es decir, v tiene al menos dos vecinos. Uno de ellos es u, supongamos que w es el otro. Nos gustaría probar que u y w están en componentes distintas de $G - v$. Para ello, bastaría con mostrar que no existen (u, w)-trayectorias en $G - v$. Supongamos que sí existe, sea T una (u, w)-trayectoria en $G - u$. Así, $T \circ (w, v, u)$ es un ciclo en G (observemos que T no pasa por v) que pasa por la arista a, lo que es una contradicción por la proposición 83. Por lo tanto no existen (u, w)-trayectorias en $G - v$, los vértices u y w están en componentes distintas de $G - v$, es decir, $G - v$ es inconexa y v es un vértice de corte de G.

Para probar (ii), supongamos que u tiene grado uno. Si v también tuviese grado uno, la subgráfica $G[\{u, v\}]$ sería una componente de G isomorfa a K_2 y ya que el orden de G es al menos tres, G tendría dos componentes. Es decir, G es inconexa, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si u tiene grado uno entonces v tiene grado al menos dos. □

Recapitulando la prueba anterior, si $a = uv$ es un puente en una gráfica conexa G de orden al menos tres entonces pueden pasar tres cosas:

1. $d_G(u) = 1$, $d_G(v) \geq 2$ y v es un vértice de corte en G.
2. $d_G(v) = 1$, $d_G(u) \geq 2$ y u es un vértice de corte en G.

3. $d_G(u) \geq 2$, $d_G(v) \geq 2$ y tanto u como v son vértices de corte en G.

6.4 Propiedades de las gráficas sin vértices de corte

En lo que resta de esta sección, G será una gráfica de orden n con $n \geq 3$ y sin vértices de corte. Por el teorema 85, G no puede tener puentes. Por la proposicion 52, todas las aristas de G están en un ciclo.

Lo que sigue es una buena muestra —a mi parecer— de una forma usual de trabajar en Teoría de las Gráficas en particular y en matemáticas en general: examinando casos pequeños (que son más manejables). Algunas veces estos casos pequeños nos permiten dan una prueba en genera (que es lo a lo que aspiramos).

¿Qué pasará con los vértices? Por la proposición 79, cada vértice u en G debe tener al menos dos vecinos, es decir, hay dos aristas que le inciden. Escojamos una y llamémosla a. Por la proposición 52 hay un ciclo en G que pasa por a y, en particular, pasa por el vértice u.

¿Y qué pasará si en vez de considerar un vértice consideramos dos vértices de G, digamos u y v? ¿Habrá un ciclo que pase por ambos vértices?

Examinemos primero el caso que parece más fácil: cuando u y v son adyacentes (es decir, cuando $d_G(u, v) = 1$). Pero este caso ya está, pues uv es una arista en G.

Ahora supongamos que $d_G(u, v) = 2$, es decir, existe un vértice w que es adyacente tanto a u como a v (pero u y v no son adyacentes). Ya que w no es un vértice de corte por hipótesis, $G - w$ es conexa. Tanto u como v son vértices en $G - w$, por lo tanto existe una (v, u)-trayectoria T en $G - w$. Basta con observar que

$$T \circ (u, w, v)$$

es un ciclo cuando regresamos a G.

El siguiente caso es relevante porque a partir de él se sigue con bastante facilidad el caso general. Supongamos que $d_G(u, v) = 3$. Es decir, existen dos vértices x y y tales que (u, x, y, v) es una trayectoria (de longitud mínima). En particular, tenemos que

$$d_G(u, y) = 2,$$

es decir, por el caso anterior sabemos que hay un ciclo en G que pasa por x y v, llamémosle C.

Si, de casualidad, C pasase por el vértice u, ya tendríamos el ciclo deseado. Por tanto, supongamos que C no pasa por el vértice u. A partir de C construiremos un nuevo ciclo que pase tanto por u como por v. Para ello, todavía nos hace falta una trayectoria auxiliar, en concreto, una trayectoria de u a v pero que no pase por x. Dicha trayectoria existe por que $G - x$ es conexa, llamémosle P. Notemos que la trayectoria P y el ciclo C se intersecan, al menos en v, llamemos w al primer vértice de P que también está en C. Sea P' la $(u,\, w)$-subtrayectoria de P. Así, tendríamos que

$$V(P') \cap V(C) = \{w\}.$$

Hay dos subtrayectorias de w a x en C. Una de ellas, al menos, pasa por v (de hecho, hay un caso en el que ambas pasan por w, ¿qué caso es?), llamémosla C'. Así, tendríamos que

$$P' \circ C' \circ (x, u)$$

es un ciclo que pasa tanto por u como por v.

Finalmente queda el caso general. Lo anterior sugiere que el caso en general se puede construir por inducción sobre la distancia entre los vértices u y v. El caso base ya está y, para un entero positivo k, supongamos que para todo par de vértices u' y v' tales que $d_G(u',\, v') < k$, existe un ciclo que pasa tanto por u' como por v'. Y supongamos que $d_G(u,\, v) = k$. Debemos mostrar que existe un ciclo que pasa por u y v. Sabemos que existe una $(u,\, v)$-trayectoria de longitud k:

$$T = (u = x_0, x_1, \ldots, x_k = v).$$

Observemos que $d_G(x_1,\, v) = k - 1$. Por la hipótesis inductiva, existe un ciclo C que pasa tanto por x_1 como por v. Ya que x_1 no es un vértice de corte, existe una $(u,\, v)$-trayectoria P que no pasa por x_1 (es decir, P es una trayectoria en $G - x_1$.

Si C pasase por el vértice u, ya tendríamos el ciclo deseado. Por tanto, supongamos que C no pasa por el vértice u. Notemos que la trayectoria P y el ciclo C se intersecan, al menos en v, llamemos w al primer vértice de P que también está en C. Sea P' la $(u,\, w)$-subtrayectoria de P. Así, tendríamos que

$$V(P') \cap V(C) = \{w\}.$$

Hay dos subtrayectorias de w a x_1 en C. Una de ellas, al menos, pasa por v (de hecho, hay un caso en el que ambas pasan por w, ¿qué caso es?), llamémosla C'. Así, tendríamos que

$$P' \circ C' \circ (x_1, u)$$

es un ciclo que pasa tanto por u como por v.

Como pueden ver, tanto la prueba del caso cuando $d_G(u,\, v)$ es tres así para el paso inductivo son, esencialmente, idénticas.

Lo que uno usualmente se pregunta es: ¿qué pasará con el regreso? Es decir, ¿la afirmación «si para cualquier par de vértices u y v existe un ciclo que pasa por ambos entonces G no tiene vértices de corte» será verdadera?

La afirmación también es cierta y podemos enunciar el teorema:

Teorema 86. *Consideremos una gráfica conexa G de orden al menos tres, G no tiene vértices de corte si y sólo si para cualquier par de vértices u y v en G, existe un ciclo que pasa por ambos.*

Sólo faltaría por probar el regreso, para ello sólo daré los elementos principales de la prueba. Tenemos que probar que para cualquier vértice x en G, la gráfica $G - x$ sigue siendo conexa, es decir, que para cualquier par de vértices u y v en $G - x$, existe un $(u,\, v)$-camino en $G - x$, es decir, un $(u,\, v)$-camino en G que no pase por x. Por hipótesis, existe un ciclo en G que pasa tanto por u como por v. En tal ciclo, hay dos $(u,\, v)$-subtrayectorias que sólo se intersecan en u y en v. En el peor de los casos (el que falla) una de esas trayectorias pasa por x pero, en tal caso, la otra ya no puede pasar por x. Es la trayectoria que buscamos.

Vértice y arista

G es una gráfica conexa de orden al menos tres y sin vértices de corte. Ya sabemos que para todo par de vértices, existe un ciclo que pasa por ambos. ¿Qué pasará entre un vértice y una arista? No está de más pensar que pasa lo mismo y tratar de probarlo (en el peor de los casos, encontraríamos un contraejemplo que nos mostrará que estábamos equivocad-s).

Nos gustaría probar que en una gráfica conexa G de orden al menos tres y sin vértices de corte, para cualquier vértice u y cualquier arista $a = xy$, existe un ciclo que pasa por u y por a. Ya sabemos que para cualquier par de vértices, existe un ciclo que pasa por ambos por el teorema **??**. En particular, existe un C que pasa por u y por y. Si C también pasa por x, ¿habremos terminado? No, que un ciclo pase por ambos extremos de una arista no implica que pase por la arista, pero sí podemos modificar el ciclo para hacer que pase por la arista. Así, podemos suponer que C no pasa por x.

Tenemos un ciclo C que pasa tanto por y como u, el vértice x es adyacente al ciclo y sabemos que G no tiene vértices de corte: la situación es exactamente la misma que en la prueba del teorema **??**. Si usamos la misma técnica, obtendremos un ciclo C' que pasa por los vérticex x, y y u. Como en el párrafo anterior, podría ser que C' no pase por la arista a pero, en ese caso, se puede modificar el ciclo para que pase tanto por la arista a como por el vértice u.

Sólo restaría por preguntarnos, ¿si una gráfica (conexa y de orden al menos tres) satisface que cada vez que tomemos una arista a y un vértice u existe un ciclo que pase por a y por u entonces no tendrá vértices de corte? La prueba es parecida (pero no ciertamente no igual) al caso en el que sabíamos que para todo par de vértices, existía un ciclo que pasaba por ambos.

6.4.1 El número de vértices de corte

6.5 Bloques

Falta darle nombre a la propiedad con la que trabajamos anteriormente.

Definición 87. Una gráfica no-trivial y sin vértices de corte es *no-separable* o *biconexa*.

Hay gráficas (diferentes de la trivial) que poseen vértices de corte y, de la misma forma que no todas las gráficas son conexas pero podemos estudiar sus partes que sí lo son, podemos estudiar las partes que no tienen vértices de corte de las gráficas que no son no-separables. En el caso de la conexidad, las llamamos componentes, en este caso las llamamos bloques.

Definición 88. Dada una gráfica no-trivial G, cada subgráfica de G que sea no-separable y máxima por contención en los vértices y en las aristas es un *bloque* de G.

Si la gráfica G es no-separable entonces sólo tiene un bloque: ella misma.

Las componentes de una gráfica G generan una partición de los vértices de G. Es decir, si G_1, G_2, ..., G_ω son las componentes de G entonces

$$\{V(G_1), V(G_2), \ldots, V_\omega\}$$

es una partición de $V(G)$. Algo parecido pasa con los bloques, éstos generan una partición de las aristas. Supongamos que G es una gráfica no-trivial y B_1, B_2, $\ldots$, B_k son los bloques de G. Tenemos que

$$\{A(B_1), A(B_2), \ldots, A(B_k)\}$$

es una partición de $A(G)$.

Algunas de las propiedades de los bloques son las siguientes.

Proposición 89. *Consideremos dos bloques B_1 y B_2 en una gráfica G. Si existe un vértice u en $V(B_1) \cap V(B_2)$ entonces el vértice u es de corte en G.*

Más aún, sabemos cuántos pueden haber.

Proposición 90. *Si B_1 y B_2 son dos bloques en una gráfica G entonces*

$$|V(B_1) \cap V(B_2 \mid \leq 1.$$

Capítulo 7

Conexidad II: Conexidad en general

En el capítulo anterior examinamos gráficas conexas pero que son poco conexas. Ya sabemos que la trayectoria de orden cinco y la estrella de orden cinco son menos conexas que el ciclo de orden cinco y la gráfica completa de orden cinco. Sin embargo, todavía no tenemos un criterio o una forma de decir que el ciclo de orden cinco es menos conexa que la gráfica completa de orden cinco (que es lo que un- puede esperar).

7.1 Conexidad (puntual)

7.1.1 Discusión de la definición

Dados una gráfica G y un vértice u en G, habíamos definido $G-u$. Ahora, consideremos un subconjunto propio S de $V(G)$, definiremos

$$G-S = G[V(G) \setminus S].$$

Diremos que S es un *conjunto de corte* de G si $G-S$ es inconexa. Observemos que si G es una gráfica inconexa, entonces el conjunto vacío es un conjunto de corte.

Si G no es una gráfica completa entonces existen dos vértices x y y en G tales que no son adyacentes. Si tomamos $S = V(G) \setminus \{x, y\}$ entonces

$$G-S \cong \overline{K_2},$$

es decir, $G - S$ es inconexa. Por lo tanto, S es un conjunto de corte. ¿Podría haber un conjunto de corte más grande? No. Si a una gráfica le quitamos $n - 1$ de sus vértices, lo que nos queda es necesariamente K_1, que es conexa. Por lo tanto, tenemos que si S es un conjunto de corte en una gráfica G entonces

$$|S| \leq n - 2.$$

¿Qué tan chico puede ser un conjunto de corte? Si nuestra gráfica, de pura casualidad, tuviese un vértice de corte, llamémosle u entonces el conjunto $\{u\}$ es de corte. Por lo tanto,

$$1 \leq |S|.$$

Pero esto no siempre pasa, en muchas ocasiones los conjuntos de corte serán más grandes.

En las gráficas completas, los conjuntos de corte no tienen sentido porque para cualquier subconjunto propio S de K_n, la gráfica $K_n - S$ siempre será completa y nunca será inconexa.

Si una gráfica G no es completa, definiremos su *conexidad* (y la denotaremos por $\kappa(G)$) como la mínima cardinalidad de entre todos sus conjuntos de corte. Es una medida de cuántos vértices debemos de quitar para desconectar la gráfica. Sólo resta preguntarnos cómo definiremos la conexidad en el caso de las gráficas completas; al menos, podemos afirmar que de entre todas las gráficas de orden n, la gráfica completa K_n es la más conexa. La pregunta es ¿qué gráfica le sigue?

Si G tiene que ser una gráfica de orden n, diferente de K_n pero mucho conexa, podemos pensar en K_n menos una arista, $K_n - a$ para alguna $a = uv$ en $A(K_n)$. El conjunto $B = V(K_n) \setminus \{u, v\}$ es de corte en K_n. Ya que la cardinalidad de B es $n - 2$, de la definición de conexidad (el mínimo de las cardinalidades de los conjuntos de corte) se sigue que:

$$\kappa(K_n - a) \leq n - 2.$$

Un- puede esperar que son iguales pero para ello tendríamos que probar que

$$\kappa(K_n - a) \geq n - 2,$$

es decir, que para todo conjunto de corte S de $K_n - a$,

$$|S| \geq n - 2.$$

Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que lo anterior no se cumple. Así, existe un conjunto de corte T de $K_n - a$ tal que

$$|T| < n - 2.$$

Como la cardinalidad de T es un entero no-negativo,

$$|T| \leq n - 3.$$

En tal caso, $(K_n - a) - T$ sería una gráfica de orden al menos tres inconexa. Al ser inconexa, le deben faltar al menos dos aristas (véase el primer ejercicio del segundo capítulo). Pero, en tal caso, a $K_n - a$ le tendrían que faltar a lo más dos aristas, lo que no es cierto. Por lo tanto tenemos que $|S| \geq n - 2$ y esto implica que

$$\kappa(K_n - a) = n - 2.$$

¿Existirá una gráfica G de orden n cuya conexidad sea $n - 1$, según la definimos arriba? En caso de existir, por definición tendríamos un subconjunto T de $V(G)$ tal que:

1. $|T| = n - 1$ y
2. $G - T$ es inconexa.

Pero esto no es posible, ya que $G - T$ sería isomorfa a K_1.

Con base en lo anterior, definimos la conexidad de K_n como $n - 1$, es decir,

$$\kappa(K_n) = n - 1.$$

7.1.2 Definición

Con esto la definición queda completa:

Definición 91 (Conexidad (puntual))**.** Dada una gráfica G, la *conexidad* de G es el mínimo número de vértices que hay que quitarle para desconectarla o que quede la gráfica trivial.

7.1.3 Algunos resultados

Proposición 92. *Con lo anterior, ya conocemos algunos resultados sobre conexidad en gráficas.*

1. *Si G es una gráfica inconexa entonces*
$$\kappa(G) = 0,$$
ya que el vacío es un conjunto de corte de G.

2. *Si G es conexa y tiene vértices de corte entonces*
$$\kappa(G) = 1.$$

3. *Si G es conexa y no tiene vértices de corte entonces*
$$\kappa(G) \geq 2.$$

4. *Para todo entero n con $n \geq 3$,*
$$\kappa(C_n) = 2,$$
donde C_n es el ciclo de orden n.

5. *Para todo entero n con $n \geq 4$,*
$$\kappa(W_n) = 3,$$
donde W_n es la rueda de orden n.

6. *Para todo entero n con $n \geq 1$,*
$$\kappa(K_n) = n - 1.$$

7.2 Conexidad por aristas o lineal

Dados una gráfica G y una arista a en G, habíamos definido $G - a$. Ahora, consideremos un subconjunto T de $A(G)$, definiremos
$$G - T = (V(G), A(G) \setminus T).$$

Definición 93. Diremos que T es un *conjunto de corte (de aristas)* de G si $G - T$ es inconexa. La única gráfica que no posee conjuntos de corte de aristas es K_1.

Siempre que la gráfica sea diferente de K_1, tiene dos posibilidades: o G ya es inconexa o posee un conjunto de corte de aristas, en particular, todas sus aristas.

Análogamente, nos interesa saber cómo podemos desconectar una gráfica al quitarle aristas.

Definición 94 (Conexidad lineal o por aristas)**.** Dada una gráfica G, la *conexidad lineal o por aristas* de G es el mínimo número de aristas que hay que remover para desconectarla si no es K_1 o es cero cuando es K_1. La conexidad lineal de una gráfica G la denotamos por $\lambda(G)$.

El siguiente resultado es una generalización de lo que ya sabíamos para puentes.

Proposición 95. *Dada una gráfica conexa G, si T es un conjunto de corte de aristas de G entonces $G - T$ tiene exactamente dos componentes.*

¿Cuál será la conexidad lineal de la gráfica completa de orden n, K_n? Si quitamos todas las aristas que inciden en un vértice fijo, obtendremos una gráfica inconexa (por un lado el vértice y por el otro el resto de la gráfica). Ese es un conjunto de corte de aristas que tiene $n - 1$ elementos (dados por los vecinos del vértice en K_n). Pero la pregunta es: ¿existirá un conjunto de corte más chico o esa será la conexidad lineal de K_n? Esa será la cardinalidad mínima de los conjuntos de corte de aristas de K_n. Para probar ello, tomemos un conjunto de corte de aristas arbitrario T de K_n. Mostraremos que

$$|T| \geq n - 1.$$

Ya que T es un conjunto de corte de aristas, la gráfica $G - T$ es inconexa, sea G' una de sus componentes. Definamos los siguientes conjuntos:

$$A = V(G') \text{ y } B = V(G) \setminus V(G').$$

Notemos que $G' = G[A]$. Ya que G es una gráfica completa, entre cada vértice en A y cada vértice en B hay una arista, es decir, entre los vértices de A y los de B hay $|A||B|$ aristas. Digamos que $|A| = k$, así entre A y B tenemos $k(n - k)$ aristas. Ya que en $G - T$ sabemos que $G[A]$ queda desconectado de $G[B]$, ninguna de las aristas entre A y B pueden estar en $G - T$. Es decir,

$$k(n - k) \leq |T|.$$

Notemos que $k \geq 1$ y $n-k \geq 1$, por lo que $k-1 \geq 0$ y $n-k-1 \geq 0$. Así,

$$0 \leq (k-1)(n-k-1) = k(n-k-1) - (n-k-1),$$

$$0 \leq (k-1)(n-k-1) = k(n-k) - k - (n-1) + k$$

y se sigue que

$$n-1 \leq k(n-k) \leq |T|.$$

Por lo tanto,

$$\lambda(G) = n-1.$$

7.3 Algunos resultados sobre conexidad

Teorema 96 (Whitney)**.** *Dada una gráfica G,*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Demostración. Probemos primero que $\lambda(G) \leq \delta(G)$. Tomemos un vértice x en G tal que

$$d_G(x) = \delta(G).$$

El conjunto

$$T = \{a \colon x \text{ es extremo de } a\}$$

tiene cardinalidad $\delta(G)$ y es subconjunto de las aristas de G. Más aún, la gráfica $G - T$ es inconexa ya que x queda aislado. Por lo tanto,

$$\lambda(G) \leq |T| = \delta(G).$$

Ahora probemos que $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. Por definición, existe un conjunto de aristas E tal que $|E| = \lambda(G)$ y $G - E$ es inconexa. Por la proposicion 95, en $G - E$ hay exactamente dos componentes, sean G' y G''. Consideraremos dos casos, que exista un vértice en G' y un vértice en G'' que no sean adyacentes en G o su negación (es decir, que todo vértice en G' sea adyacente a todo vértice en G'').

Primero supongamos que existe un vértice u en G' y un vértice v en G'' tal que u y v no son adyacentes en G. Así, para cada arista a en E, uno de sus extremos es diferente de u y de v; sea E' el conjunto de vértices que tenga un vértice diferente de u y de v por cada arista a en E. Tenemos que

$$|E'| = |E|.$$

Notemos que $G - E'$ es una subgráfica de $G - E$ en la que al menos están u y v, por lo tanto $G - E'$ es inconexa. Se sigue que E' es un conjunto de corte de vértices y

$$\kappa(G) \leq |E'| = |E| = \lambda(G).$$

Ahora supongamos que para todo vértice en G' es adyacente a todo vértice en G''. Si $r = |G'|$ y $n - r = |G''|$ entonces

$$r(n - r) = |E|.$$

Ya que tanto G' como G'' son componentes, tenemos que $r > 0$y $n - r > 0$. Así, $r - 1 \geq 0$ y $n - r - 1 \geq 0$ y

$$0 \leq (r - 1)(n - r - 1) = (r - 1)(n - r) - (r - 1)$$

□

7.4 El teorema de Menger

A veces nos interesa ser más específic-s con respecto a quiénes desconectamos. Dados dos vértices **no adyacentes** u y v, un $\{u, v\}$-*separador* es un subconjunto S de $V(G) \setminus \{u, v\}$ tal que en $G - S$ los vértices u y v quedan en componentes diferentes. La *conexidad local* de u y v, denotada por $\kappa_G(u, v)$ es la menor cardinalidad de un $\{u, v\}$-separador en G.

Proposición 97. *Dada una gráfica G,*

$$\kappa(G) = \text{mín}\{\kappa_G(u, v) \colon u \textit{ y } v \textit{ son vértices no adyacentes en } G\}.$$

Demostración. Debemos probar dos desigualdades. Probemos primero que

$$\kappa(G) \geq \text{mín}\{\kappa_G(u, v) \colon uv \notin A(G)\}.$$

Tomemos un conjunto de corte S en G. Ya que $G - S$ es inconexa, existen dos vértices x y y que están en componentes distintas de $G - S$. Ya que S es un conjunto (x, y)-separador, tenemos que

$$\kappa(G) = |S| \geq \kappa_G(u, v) \geq \text{mín}\{\kappa_G(u, v) \colon uv \notin A(G)\}.$$

Ahora probemos que

$$\kappa(G) \leq \text{mín}\{\kappa_G(u, v) \colon uv \notin A(G)\}.$$

Tomemos dos vértices x y y tales que

$$\kappa_G(x, y) = \text{mín}\{\kappa_G(u, v) \colon uv \notin A(G)\},$$

y sea S un conjunto $(x,\ y)$ separador tal que

$$|S| = \kappa_G(x, y).$$

En particular, S es un conjunto de corte en G. Por lo tanto,

$$\kappa(G) \leq |S|$$

□

Podemos definir la noción análoga para el caso de la conexidad lineal. En este caso no es necesario pedir que u y v no sean adyacentes. Análogamente, la *conexidad lineal local* de u y v, denotada por $\lambda_G(u,\ v)$ es la menor cardinalidad de un $\{u,\ v\}$-separador de aristas en G.

Dados dos vértices u y v en una gráfica, dos $(u,\ v)$-trayectorias P y Q son *internamente ajenas* si

$$V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}.$$

Consideremos dos vértices no adyacentes u y v en una gráfica G. Si entre hubiese al menos una $(u,\ v)$-trayectoria en G, deberíamos de quitarle al menos un vértice a esa trayectoria si quisiésemos desconectar u de v. Pero esto no nos asegura que u y v queden desconectados. Si existiesen dos $(u,\ v)$-trayectorias internamente ajenas, tendríamos que quitarle al menos un vértice a cada trayectorias (es decir, al menos dos) para desconectar u y v. Pero quitar esos dos vértices no nos asegura que desconectemos u y v. Incluso si nos fijamos en el máximo número posible de $(u,\ v)$-trayectorias internamente ajenas en G, al escoger un vértice de cada una (diferente de u y de v), al retirarlos no podemos asegurar que se desconectaremos u y v, llamemos $\rho_G(u,\ v)$ a dicho número. Sin embargo, tendríamos que

$$\rho_G(u, v) \leq \kappa_G(u, v).$$

De otra forma,

$$\text{máx}\{|P| \colon P \text{ es un conjunto de } (u, v)\text{-trayectorias int. ajenas}\} \leq \\ \text{mín}\{|S| \colon S \text{ es un conjunto } (u, v)\text{-separador}\}.$$

Karl Menger mostró en 1932 que, de hecho, ambas cantidades son iguales. Es uno de los primeros ejemplos de un teorema *minimax*.

Teorema 98 (Teorema de Menger)**.** *Dados dos vértices no adyacentes u y v en una gráfica G, el máximo número de (u, v)-trayectorias internamente ajenas en G es igual a la mínima cardinalidad de un conjunto (u, v)-separador. Es decir,*

$$\rho_G(u, v) = \kappa_G(u, v).$$

Recordemos que una gráfica G es k-conexa si al quitarle cualquier conjunto de menos de k vértices, lo que nos queda no está desconecto, y tenemos que $k \leq \kappa(G)$. Como consecuencia del teorema de Menger, tenemos el un teorema que es una generalización de un teorema de Hassler Whitney.

Teorema 99 (Whitney)**.** *Dada una gráfica G, G es 2-conexa si y sólo entre cualquier par de vértices u y v existen al menos dos (u, v)-trayectorias internamente ajenas.*

Teorema 100. *Dada una gráfica G, G es k-conexa si y sólo si entre cualquier par de vértices u y v el número de (u, v)-trayectorias internamente ajenas es al menos k.*

Para probar este este resultado a partir del teorema de Menger, necesitamos de un resultado.

Proposición 101. *Dadas una gráfica G y una arista a en G,*

$$\kappa(G - a) = \begin{cases} \kappa(G) \\ \kappa(G) - 1. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos un conjunto de corte de cardinalidad mínima S en $G - a$. Tenemos dos posibilidades: $G - S$ es o no conexa. Supongamos que $G - S$ no es conexa, es decir, S es un conjunto de corte en G. Por lo tanto, $|S| \geq \kappa(G)$.

En caso de que $G - S$ sea conexa, significa que □

Demostración del teorema 100. Primero supongamos que G es una gráfica k-conexa. □

Capítulo 8

Paseos eulerianos

Recordemos que un paseo en una gráfica es un camino que no repite aristas pero que podría —o no— repetir vértices. En particular, todo camino de longitud cero o uno es un paseo. El *problema de los puentes de Königsberg* nos motivó a pensar en paseos que pasan por **todas** las aristas de una gráfica.

Definición 102 (Paseo euleriano)**.** Dada una gráfica G, un *paseo euleriano* es paseo que pasa por todas las aristas de G. Esto es, es un camino que pasa por cada arista de G una y sólo una vez.

Lo primero que un- se pregunta cuando introduce un nuevo concepto es ¿existirán gráficas que tengan un paseo euleriano? Recordemos que habrán dos tipos de paseos eulerianos: abierto y cerrados.

- El ciclo C_n de longitud n tiene un paseo euleriano cerrado pero no abierto.
- La trayectoria P_n de orden n tiene un paseo euleriano abierto pero no cerrado.

Una vez que ya sabemos que sí hay gráficas que tienen paseos eulerianos, la siguiente pregunta es ¿qué debería de cumplir una gráfica para que tenga un paseo euleriano cerrado[1]? Una forma de abordar dicha pregunta consiste en ver qué características tienen las gráficas que sí tienen un paseo euleriano

[1] Más tarde trataremos los paseos eulerianos abiertos.

cerrado. Para ello, veamos un ejemplo en concreto, supongamos que G es una gráfica conexa y que

$$W = (v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_4, v_6, v_1)$$

es un paseo euleriano cerrado en G. ¿Será posible saber quién es G con la información anterior? ¿Qué sabemos?

1. Como W tiene longitud nueve y ahí aparece cada arista de G una y sólo una vez, la gráfica G tiene tamaño nueve.

2. Ya que G es conexa (por hipótesis) y tiene al menos una arista, todo vértice tiene grado al menos uno, es decir, todo vértice incide en una arista. Esa arista aparece en W y por lo tanto el vértice aparece en W. Por lo tanto, todo vértice de G aparece en W. Así

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}.$$

3. Tomemos un vértice u en $V(G)$. Recordemos que el grado del vértice u es el número de sus vecinos y sus vecinos son aquellos vértices que están unidos a u por medio de una arista. Podemos dar una función

$$\phi_u \colon N(u) \to \{1, 2, \ldots, 6\},$$

tal que para w en $N(u)$, $\phi_u(w) = k$ si y sólo si $u = v_k$ y w es adyacente al vértice v_k en W (y esto significa que $w = v_{k-1}$ o que $w = v_{k+1}$). Primero tendríamos que verificar que efectivamente ϕ_u es una función, es decir, que está bien definida (que a cada elemento en el dominio le corresponda uno en el contradominio y que éste sea único).

¿Qué sabemos sobre la función?

Ya que W es un paseo puede pasar varias veces por el vértice v_i, eso dependerá de cuántos vecinos tenga este vértice.

Tomemos un vértice v_i en $V(G)$. Recordemos que el grado del vértice v_i es el número de sus vecinos y sus vecinos son aquellos vértices que están unidos a v_i por medio de una arista. Ya que W es un paseo puede pasar varias veces por el vértice v_i, eso dependerá de cuántos vecinos tenga este vértice.

Capítulo 9

Recorridos hamiltonianos

Los recorridos hamiltonianos son el equivalente a los paseos eulerianos pero con respecto a los vértices.

Definición 103 (Trayectoria hamiltoniana)**.** Una trayectoria en una gráfica G es *hamiltoniana*[1] si pasa por todos los vértices de G. Si una gráfica G posee una trayectoria hamiltoniana, decimos que G es *trazable*.

Definición 104 (Ciclo hamiltoniano)**.** Un ciclo en una gráfica G es *hamiltoniano* si pasa por todos los vértices de G. Si una gráfica G posee un ciclo hamiltoniano, decimos que G es *hamiltoniana*.

Hay algunas observaciones que se pueden hacer, fácilmente, sobre los conceptos anteriores.

1. Si G posee un ciclo hamiltoniano entonces G posee una trayectoria hamiltoniana (basta con *recortar* el ciclo dejando de recorrer una arista).

2. Si G no es conexa entonces no puede tener trayectoria hamiltoniana (y mucho menos un ciclo).

3. Si G posee vértices de corte entonces no puede tener un ciclo hamiltoniano (por lo tanto G es 2-conexa).

[1] En español, todos los adjetivos derivados de nombres propios —en este caso, «hamiltoniano» deriva del apellido inglés Hamilton— se escriben con minúscula inicial salvo que estén obligados a empezar con mayúscula, como cuando empiezan una oración.

Proposición 105. *Dado un conjunto S de orden n, para cualquier partición de S en dos conjuntos A y B, sin pérdida de generalidad podemos suponer que*

$$|A| \leq \frac{n}{2} \leq |B|.$$

Demostración. Por definición, tenemos que:

$$\text{mín}\{|A|, |B|\} \leq |A| \leq \text{máx}\{|A|, |B|\}$$

y

$$\text{mín}\{|A|, |B|\} \leq |B| \leq \text{máx}\{|A|, |B|\}.$$

Al sumarlos, tenemos que

$$2\,\text{mín}\{|A|, |B|\} \leq |A| + |B| \leq 2\,\text{máx}\{|A|, |B|\}$$

y ya que A y B son ajenos,

$$|A| + |B| = |A \cup B| = |S| = n.$$

Así,

$$2\,\text{mín}\{|A|, |B|\} \leq n \leq 2\,\text{máx}\{|A|, |B|\}$$

y, al dividir,

$$\text{mín}\{|A|, |B|\} \leq \frac{n}{2} \leq \text{máx}\{|A|, |B|\}.$$

Finalmente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|A| \leq |B|$. Porque, en caso de que pásase al contrario que $|B| \leq |A|$, podríamos intercambiar sus nombres sin que nada más se modifique. Bajo ese supuesto, tenemos que

$$A = \text{mín}\{|A|, |B|\}$$

y que

$$B = \text{máx}\{|A|, |B|\}.$$

Por lo tanto,

$$|A| \leq \frac{n}{2} \leq |B|.$$

□

Proposición 106. *Si G es una gráfica de orden n que satisface que para todo vértice u en $V(G)$ se tiene que*

$$\mathrm{d}(v) \geq \frac{n}{2}$$

entonces G es conexa.

Demostración. Recordemos que una gráfica G es conexa si y sólo si para toda partición de $V(G)$ en dos conjuntos A y B, siempre existe una arista con un extremo en A y otro en B. Si probamos esto último, estaremos probando que G es conexa.

Tomemos una partición arbitraria de $V(G)$ dada por los conjuntos A y B y supongamos, sin pérdida de generalidad por la proposición 105, que

$$|A| \leq \frac{n}{2} \leq |B|$$

y tomemos un vértice u en A. Probaremos que u tiene un vecino en B por **contradicción**, es decir, supongamos que no esto no es cierto, así $N(u) \subseteq A$. Más aún, $N(u) \subseteq A \setminus \{u\}$ y así

$$\mathrm{d}(u) = |N(u)| \leq |A \setminus \{u\}| = |A| - 1 \leq \frac{n}{2} - 1 < \frac{n}{2}.$$

Junto con la hipótesis, tenemos que

$$\frac{n}{2} \leq \mathrm{d}(u) < \frac{n}{2},$$

es decir,

$$\frac{n}{2} < \frac{n}{2},$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, no es cierto que $N(u) \subseteq A$, es decir, u tiene un vecino en B. Por lo tanto, G es conexa. □

La condición anterior es *justa*, esto significa que si la debilitamos *un poco*, ya no es cierta. En concreto: existen gráficas de orden n que satisfacen que para todo vértice u,

$$\mathrm{d}(u) \leq \frac{n}{2} - 1$$

pero G no es conexa.

Cuando se tiene una trayectoria $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, podrían existir muchas formas de dar un ciclo C tal que $V(C) = V(P)$. La manera más fácil la tenemos cuando los vértices x_1 y x_k son adyacentes. Pero no siempre somos tan afortunad-s.

Supongamos que x_1 y x_k tienen *muchos vecinos* en P. ¿Cuántos son muchos? Al menos la mitad de los vértices. Es decir,

$$\mathrm{d}_G(x_1) \geq \frac{k}{2} \text{ y } \mathrm{d}_G(x_k) \geq \frac{k}{2}.$$

Ya que queremos obtener un ciclo C tal que $V(C) = V(P)$, podemos suponer que x_1 y x_k no son adyacentes.

La siguiente manera (en orden de facilidad), sería con el auxilio de dos aristas que no estén en P. Si existiese un entero j en $\{2, 3, \ldots, k\}$ tal que

$$x_j \in N(x_1) \text{ y } x_{j-1} \in N(x_k), \tag{9.1}$$

entonces

$$P^{-1}[x_{j-1}, x_1] \circ (x_1, x_j) \circ P[x_j, x_k] \circ (x_k, x_{j-1})$$

sería un ciclo que pasa por todos y sólo por los vértices de P. En lo que sigue, trataremos de encontrar ese par de aristas que nos permitieron convertir la trayectoria en un ciclo.

Lema 107. *Consideremos una digráfica D y una trayectoria*

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

en D. Si P satisface que

- $N(x_1) \subseteq V(P)$,
- $N(x_k) \subseteq V(P)$ *y*
- $\mathrm{d}(x_1) + \mathrm{d}(x_k) \geq k$

entonces existe un ciclo C tal que

$$V(C) = V(P).$$

Demostración. Definamos el siguiente conjunto

$$B = \{x_{i-1} \colon x_i \in N(x_1)\},$$

que son los vértices que preceden a los vecinos de x_1 en P. En caso de existir

$$x_j \in B \cap N(x_k),$$

por la definición de B tendríamos que $x_{j+1} \in N(x_1)$ y así

$$P^{-1}[x_j, x_1] \circ (x_1, x_{j+1}) \circ P[x_{j+1}, x_k] \circ (x_k, x_j)$$

sería un ciclo que cuyos vértices coinciden con los de P. Por tanto, queremos probar que la intersección $B \cap N(x_k)$ no es vacía. O, lo que es lo mismo, que

$$|B \cap N(x_k)| \geq 1.$$

Para esto debemos debemos de analizar en dónde viven cada uno de esos conjuntos y cuál es su cardinalidad. Sabemos que

$$N(x_1) \subseteq \{2, 3 \ldots, k\} \text{ y } N(x_k) \subseteq \{1, 2 \ldots, k-1\}.$$

De la forma en como definimos B, tenemos que

$$B \subseteq \{1, 2 \ldots, k-1\} \text{ y } N(x_k) \subseteq \{1, 2 \ldots, k-1\}.$$

¿Cuáles son sus cardinalidades?

$$|B| = |N(x_1)| = \mathrm{d}(x_1) \text{ y } |N(x_k)| = \mathrm{d}(x_k).$$

Ya que

$$B \cup N(x_k) \subseteq \{1, 2 \ldots, k-1\},$$

tenemos

$$|B \cup N(x_k)| \leq |\{1, 2 \ldots, k-1\}| = k - 1.$$

Para cualesquiera dos conjuntos X y Y, sabemos que (y, si no lo sabemos, lo podemos probar)

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Al juntar lo anterior, tenemos que:

$$\begin{array}{rclclclcl}
k-1 & \geq & |B \cup N(x_k)| & = & |B| & + & |N(x_k)| & - & |B \cap N(x_k)| \\
 & \geq & |B \cup N(x_k)| & = & \mathrm{d}(x_1) & + & \mathrm{d}(x_k) & - & |B \cap N(x_k)| \\
 & \geq & |B \cup N(x_k)| & = & & k & & + & |B \cap N(x_k)|.
\end{array}$$

Así,

$$k - 1 \geq k - |B \cap N(x_k)|,$$

es decir,

$$|B \cap N(x_k)| \geq 1,$$

lo que queríamos probar. $\square$

Teorema 108. *Consideremos una gráfica G de orden n, con $n \geq 3$. Si para todo vértice u en $V(G)$ se tiene que*

$$\mathrm{d}(u) \geq \frac{n}{2}$$

entonces G posee un ciclo hamiltoniano.

Demostración. Consideremos una trayectoria P de **longitud máxima** en G. Digamos que

$$P = (x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Ya que P es de longitud máxima, tendremos que:

$$N(x_1) \subseteq V(P) \text{ y } N(x_k) \subseteq V(P).$$

Y claramente $k < n$, pues los vértices de P son un subconjunto de los vértices de G. Por lo tanto, tendremos que

$$\mathrm{d}(x_1) + \mathrm{d}(x_k) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \geq k.$$

Así, tenemos las condiciones del lema 107. Por lo tanto, existe un ciclo que C tal que $V(C) = V(P)$. Si $V(C) = V(G)$, C sería un ciclo hamiltoniano. Supongamos que no, es decir, $V(G) \setminus V(C)$ es no vacío. Recordemos que G es conexa por la proposición 106, es decir, existe una arista entre $V(C)$ y $V(G) \setminus V(C)$. Pongámosle nombre a C, digamos que

$$C = (y_1, y_2, \ldots, y_k, y_1)$$

y sea $y_j x$, con x en $V(G) \setminus V(C)$, la arista que sabemos que existe por la conexidad. Así, tenemos que

$$C[y_{j+1}, y_j] \circ (y_j, x)$$

sería una trayectoria de longitud mayor que la de P, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existen vértices *fuera* de C, es decir, $V(C) = V(G)$ y C es un ciclo hamiltoniano. $\square$

Pedir que todo vértice tenga grado *al menos* $n/2$ es pedir mucho (a esa propiedad la llamaré la *condición de Dirac*). En particular, esta condición implica que la gráfica tiene muchas aristas. Y es una condición *mala* porque hay gráficas que sí son hamiltonianas pero se alejan mucho de la condición de Dirac, en particular los ciclos de longitud n, C_n. Claramente son gráficas que posee un ciclo hamiltoniano pero todos sus vértices tienen grado dos y, conforme n crezca, tendremos que la diferencia

$$2 < \frac{n}{2}$$

será tan grande como queramos.

Por otro lado, la condición de Dirac es *justa*. Si le pedimos un poco menos, no podemos asegurar la existencia de un ciclo hamiltoniano. Es decir, el enunciado:

> Consideremos una gráfica G de orden n, con $n \geq 3$. Si para todo vértice u en $V(G)$ se tiene que
>
> $$\mathrm{d}(u) \geq \frac{n}{2} - 1$$
>
> entonces G posee un ciclo hamiltoniano.

es **falso**.

Pocos años después, Øysten Ore se dio cuenta que podemos mejorar el resultado anterior. En esencia, lo importante fue que

$$\mathrm{d}(x_1 + \mathrm{d}(x_k) \geq n,$$

es decir, que la suma de los grados de sus extremos fuera grande, cuando éstos no fueran adyacentes (pues sí lo eran, ya teníamos lo que buscábamos). Así, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 109. *Consideremos una gráfica G de orden n, con $n \geq 3$. Si para todo par de vértices no adyacentes u y v en $V(G)$ se tiene que*

$$\mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(v) \geq n$$

entonces G posee un ciclo hamiltoniano.

Demostración. La $\square$

Teorema 110. *Dada una gráfica G, si existe un subconjunto S de los vértices de G tal que*

$$\omega(G - S) > |S| + 1$$

entonces G no posee ninguna trayectoria hamiltoniana.

Teorema 111. *Dada una gráfica G, si existe un subconjunto S de los vértices de G tal que*

$$\omega(G - S) > |S|$$

entonces G no posee ningún ciclo hamiltoniano.

Capítulo 10

Coloración de los vértices

Colorear los vértices una gráfica consiste en eso: pintar cada vértice con un color. Esto es una función de los vértices al conjunto de los colores. Dado que dar el «conjunto de los colores» puede ser un tanto engorroso, los pensamos como un subconjunto de los naturales. Formalmente lo definimos de la siguiente forma.

Definición 112 (Coloración de los vértices)**.** Dada una gráfica G, una función

$$\phi\colon V(G) \to \mathbb{N}$$

es una *coloración* de los vértices de G.

La imagen de $V(G)$ bajo la función ϕ (es decir, el conjunto $\{\phi(u)\colon u \in V(G)\}$) es un conjunto finito porque $V(G)$ es un conjunto finito. Para simplificar nuestro análisis, nos limitaremos a los colores que sí usamos, es decir, pensaremos en coloraciones:

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

donde $\phi^{-1}(i) \neq \emptyset$ para todo i en $\{1,\, 2,\, \ldots,\, k\}$.

Dada cualquier gráfica $G = (V(G),\, A(G))$, siempre podemos pensar en la coloración $\phi_1\colon V(G) \to \{1\}$ dada por la regla

$$v \mapsto 1,$$

para todo v en $V(G)$. Sin embargo, esto no nos diría nada sobre la gráfica y el objetivo de las coloraciones es obtener información sobre las gráficas.

Por lo anterior, no nos interesan todas las coloraciones sino coloraciones en particular, en las que los extremos de cualquier arista tengan colores diferentes.

Definición 113 (Coloración propia de los vértices)**.** Dada una gráfica G, una función

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

en la que vértices del mismo color **no sean adyacentes** y $\phi^{-1}(i) \neq \emptyset$ para todo i en $\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ es una *coloración propia* o *buena coloración* de los vértices de G.

Toda gráfica admite al menos una coloración propia, basta con pintar cada vértice con un color diferente:

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Si $V(G) = \{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$, definimos

$$v_i \mapsto i.$$

Ya que no hay dos vértices que reciban el mismo color, por vacuidad es una coloración propia. Esta coloración tampoco nos aporta información nueva sobre las gráficas. El problema radica en que usa muchos colores; es por esto que buscamos coloraciones con menos colores.

Definición 114. Si una para una gráfica $G = (V(G),\ A(G))$ existe una coloración propia

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

diremos la función ϕ es una *k-coloración* de G y que G es *k-coloreable.*

Para cada i en $\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$, $\phi{-}1(i)$ es el conjunto de los vértices en G que reciben color i y usualmente se lo llama la *clase de color i*.

Comentario. Observemos que $\phi^{-1}(1)$, $\phi^{-1}(2)$, $\ldots$, $\phi^{-1}(k)$ es una **partición** de $V(G)$ donde cada $\phi^{-1}(i)$ es un **conjunto independiente** de vértices.

Definición 115. Dada una gráfica $G = (V(G),\ A(G))$, el *número cromático* de G es el **menor número de colores** k tal que existe una k-coloración de G. Lo denotamos como[1]

$$\chi(G) = k$$

y decimos que G es *k-cromática.*

[1] La letra χ proviene del alfabeto griego y se pronuncia *ji*.

El problema consiste en determinar cuánto vale χ para cada gráfica G. En principio, sabemos algunas cosas. Ya que toda gráfica G posee al menos un vértice, sabemos que

$$\chi(G) \geq 1.$$

¿Qué pasaría si G tiene al menos una arista?

Proposición 116. *Dada una gráfica G, si ϕ es una coloración propia de G, si u y v son vértices adyacentes entonces*

$$\phi(u) \neq \phi(v).$$

Esto implica que tendríamos que tener al menos dos colores, es decir, $\chi(G) \geq 2$. Así, tenemos que:

Proposición 117. *Si G es una gráfica no-vacía*[2] *entonces*

$$\chi(G) \geq 2.$$

Lo anterior implica que

Lema 118. *Dada una gráfica G de orden n, $\chi(G) = 1$ si y sólo si G es una gráfica vacía, es decir, $G = \overline{K_n}$.*

Seguiría preguntarnos qué gráficas tienen número cromático dos. Primero examinemos cómo se comportan los ciclos. El ciclo más pequeño es C_3, el ciclo de longitud tres —que resulta ser también la gráfica completa de tres vértices, K_3—. Seguiría considerar C_4, el ciclo de longitud cuatro. Y luego seguirían los ciclos de longitud cinco y seis, C_5 y C_6, respectivamente. De este análisis podríamos conjeturar que los ciclos de longitud par tienen número cromático dos y los de longitud impar tienen número cromático tres.

Teorema 119. *Consideremos el ciclo C_n de longitud n. Si n es par entonces $\chi(C_n) = 2$ y si n es impar entonces $\chi(C_n) = 3$.*

Demostración. Tomemos el ciclo de longitud n

$$C_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$$

con $n + 1 = 1$.

[2] Recordemos que las gráficas *vacías* son aquéllas que no tienen aristas.

Primero supongamos que n es par, es decir, $n = 2k$. La idea sería colorear alternadamente los vértices con colores azul y rojo y esa tendría que ser una coloración propia. Pero es algo que ya hicimos, recordemos que C_{2k} es una gráfica bipartita por el teorema 25. Por lo tanto, existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de los vértices de C_{2k} tales que toda arista de C_{2k} tiene extremos en partes diferentes. Es decir, dos vértices en V_1 o dos vértices en V_2 no pueden ser adyacentes. Si coloreamos de azul todos los vértices en V_1 y de rojo todos los vértices en V_2, obtendremos una coloración propia de C_{2k}. Esto implica que:

$$\chi(C_{2k}) \leq 2.$$

Por otro lado, ya que C_{2k} posee al menos una arista, tenemos que

$$\chi(C_{2k}) \geq 2.$$

Por lo tanto, $\chi(C_{2k}) = 2$.

Ahora supongamos que n es impar, es decir, $n = 2k + 1$. Primero demos una 3-coloración de C_{2k+1}. Si i está en $\{1, 3, \ldots, 2k-3, 2k-1\}$, pintemos el vértice x_i de color azul y si j está en $\{2, 4, \ldots, 2k-2, 2k\}$, pintemos el vértice x_j de color rojo. Con esto, habremos pintado todos los vertices x_k con k en $\{1, 2, 3, \ldots, 2k-1, 2k\}$ y sólo restaría por colorear el vértice v_{2k+1}. Pero v_{2k}, que es rojo, es adyacente a v_{2k+1} y v_1, que es azul, es adyacente a v_{2k+1}. Por lo tanto, v_{2k+1} no podría ser rojo ni azul, pintémoslo verde. Así, hemos obtenido una 3-coloración propia de C_{2k+1}, es decir, $\chi(C_{2k+1}) \leq 3$. Para finalizar, debemos probar que $\chi(C_{2k+1}) \geq 3$. Sabemos que $\chi(C_{2k+1}) \geq 2$, ya que C_{2k+1} tiene al menos una arista. Así, la única posibilidad sería que $\chi(C_{2k+1}) = 2$, es decir, existe una coloración propia

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2\}.$$

Así, tenemos que tanto $\phi^{-1}(1)$ como $\phi^{-1}(2)$ son conjuntos independientes en C_{2k+1}. Por lo tanto, C_{2k+1} sería una gráfica bipartita, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\chi(C_{2k+1}) \neq 2$. Esto implica que

$$\chi(C_{2k+1}) \geq 3$$

y así $\chi(C_{2k+1}) = 3$ □

¿El problema serán los ciclos de longitud impar? Las gráficas bipartitas no poseen ciclos de longitud impar, ¿serán 2-cromáticas? Debemos pedir también que no sean vacías.

Teorema 120. *Consideremos una gráfica G no vacía, G es bipartita si y si sólo si $\chi(G) = 2$.*

Demostración. Primero supongamos que G es bipartita. Ya que G es no vacía, tenemos que

$$\chi(G) \geq 2.$$

Basta con probar la otra desigualdad, para ello exhibiremos una coloración propia que sólo usa dos colores. Ya que G bipartita, sabemos que existe una bipartición $\{V_1, V_2\}$ de los vértices de G. Pintemos los vértices en V_1 de color azul y los vértices de V_2 de color rojo. Ya que G es bipartita, sabemos que todas las aristas de G tienen extremos de color rojo y azul y que no pueden existir aristas que tengan sus dos extremos del mismo color. Por lo tanto, esa es una coloración propia que usa dos colores. Como el número cromático es el menor número de colores que usa una coloración propia, tenemos que

$$\chi(G) \leq 2.$$

Por lo tanto, $\chi(G) = 2$.

Ahora supongamos que G es 2-cromática, es decir, existe una coloración propia de G que usa dos colores, digamos:

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2\}.$$

Como es propia, tenemos que $\phi^{-1}(1)$, $\phi^{-1}(2)$ es una partición de $V(G)$ en dos conjuntos independientes. Así, toda arista de G debe tener extremos en elementos diferentes de la partición. Por lo tanto, G es bipartita. $\square$

Hasta el momento, ya sabemos que los números cromáticos de las gráficas completas K_1, K_2 y K_3 son uno, dos y tres, respectivamente (K_1 es vacía, K_2 es bipartita no-vacía y K_3 es el ciclo de longitud tres). ¿Qué pasará con K_4, K_5, etcétera?

Pensemos en K_4. Ya que todos los vértices son adyacentes entre sí, esperaríamos que todos tengan un color diferente. Es decir, necesitamos de cuatro colores y no se puede con menos. Lo mismo pasaría para el resto de las completas, esto es, esperaríamos que

$$\chi(K_n) = n.$$

Pero más aún, si G es una gráfica de orden n que sea n-cromática, entonces **toda** coloración

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

no puede ser propia. Es decir, si nos tomamos dos vértices u y v podemos dar la siguiente coloración:

- a cada vértice w en $V(G) \setminus \{u, v\}$ le asignamos un color diferente, con lo cual ocuparíamos $n-2$ colores y

- a los vértices u y v les damos el color $n-1$.

La anterior es una coloración que usa $(n-1)$ colores y, por lo anterior, no puede ser propia. Eso significa que alguno de los subconjuntos $\phi^{-1}(i)$, con i en $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, no es independiente. Pero todos son unitarios excepto por $\phi^{-1}(n-2) = \{u, v\}$. Éste es el conjunto que no es independiente y, por lo tanto, u y v son adyacentes. Como estos vértices fueron arbitrarios, se sigue que G es una gráfica completa.

Teorema 121. *Dada una gráfica G de orden n, G tiene número cromático n si y sólo si G es una gráfica completa.*

Demostración. Las líneas previas muestran la ida. Así pues, nos resta por probar el regreso. Supongamos que G es una gráfica completa, es decir, $G = K_n$. Por demostrar que $\chi(K_n) = n$. Por un lado la coloración

$$v_i \overset{\phi}{\mapsto} i$$

es propia y muestra que

$$\chi(K_n) \leq n.$$

Para probar la otra desigualdad, supongamos que existe una $(n-1)$-coloración propia de K_n

$$\phi \colon V(K_n) \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

Por el principio del palomar, ya que tenemos n vértices y $n-1$ colores, deben existir dos vértices u y v tales que

$$\phi(u) = \phi(v),$$

lo que muestra que ϕ no es una coloración propia, una contradicción. Por lo tanto,

$$\chi(K_n) \geq n.$$

Así tenemos que $\chi(K_n) = n$ □

Ahora consideremos una gráfica G de orden n y supongamos que tiene una subgráfica isomorfa a una completa, digamos K_p, ¿qué podemos decir del número cromático de G? Tendría que ser mayor o igual que p pues, en otro caso, tendríamos una q-coloración propia para algún $q < p$:

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, q\},$$

y ya que K_p es subgráfica de G, tendríamos una buena coloración de K_p con tan solo q colores, lo que es imposible. De ahí que $\chi(G) \geq p$. Pero en esta prueba, que K_p fuese completa no jugó ningún papel pero sí importó que fuese subgráfica. Así, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 122. *Si H es subgráfica de G entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Recordemos que el número de independencia de una gráfica G, que denotamos por $\alpha(G)$, es la mayor de las cardinalidades de entre todos los subconjuntos independientes de vértices. Ya que cada clase de color es un conjunto independiente, el número cromático guarda estrecha relación con el número de independencia.

Teorema 123. *Si G es una gráfica de orden n entonces*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

Demostración. Fijemos $k = \chi(G)$ para simplificar la notación. Por definición, G es una gráfica k-cromática y existe una k-coloración propia

$$\phi\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Las clases cromáticas $\phi^{-1}(1)$, $\phi^{-1}(2)$, $\ldots$, $\phi^{-1}(k)$ es una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes y por definición de número de independencia tenemos que

$$\phi^{-1}(i) \leq \alpha(G).$$

Así,

$$n = |\phi^{-1}(1)| + |\phi^{-1}(2)| + \cdots + |\phi^{-1}(k)| \leq k\alpha(G)$$
$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq k = \chi(G).$$

Para la otra desigualdad, bastará con exhibir una $(n-\alpha(G)+1)$-coloración propia de G. Sabemos que existe un subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que

$$|S| = \alpha(G).$$

Si coloreamos los vértices en S con un color y el resto de los vértices, que son $n - \alpha(G)$, con un color diferente cada obtendremos una $(n - \alpha(G) + 1)$-coloración propia de G. Por lo tanto,

$$k = \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

□

Hay otra cota que es fácil de probar y puede resultar —o no— muy útil. Pensemos en que coloreamos secuencialmente los vértices en una gráfica, tratando de usar el menor número de colores. Es decir, nos tomamos un vértice y lo pintamos del menor color que no aparezca en sus vecinos. En el peor de los casos, todos sus vecinos tienen un color diferente y requeriremos de otro color. Es decir, ocuparíamos a lo más $\Delta(G) + 1$ colores.

Teorema 124. *Dada una gráfica G,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Demostración. Primero etiquetemos los vértices, es decir, supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y pensemos que nuestro conjunto de colores es $\{1, 2, \ldots, k\}$. Para v_1 definimos $\phi(v_1) = 1$, ya que ninguno de sus vecinos ha sido coloreado. Luego, tomamos v_2. Si v_1 es vecino de v_2, el menor color que aparece en sus vecinos es 2 y tomamos $\phi((v_2) = 2$. Si no son vecinos, el menor color que no aparece en sus vecinos es 1 y tomamos $\phi(v_2) = 1$. A v_i, le asignamos el color

$$\text{mín}(\{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{\phi(v_j) \colon j < i \text{ y } v_j \in N_G(v_i)\}).$$

En cada paso, debemos asegurarnos que el conjunto $\{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{\phi(v_j) \colon j < i \text{ y } v_j \in N_G(v_i)\}$ no es vacío. Pero tenemos que $\{\phi(v_j) \colon j < i \text{ y } v_j \in N_G(v_i)\} \subseteq N_G(v_i)$, es decir, bastaría con probar que $\{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{\phi(v_j) \colon v_j \in N_G(v_i)\}$ es no vacío. Para ello, es suficiente que $|\{1, 2, \ldots, k\}| > \Delta(G)$, es decir, tener que $k = \Delta(G) + 1$. □

Consideremos una gráfica G que sea k-cromática. ¿Qué pasará con el número cromático si le borramos aristas o vértices (junto con las aristas que incidan en los vértices que quitamos)?

Una gráfica G es *crítica* si

$$\chi(H) < \chi(G)$$

para toda subgráfica propia H de G. Si G es k-cromática y crítica, decimos que G es k-crítica. Ya que toda subgráfica propia de un ciclo de longitud impar es un conjunto de trayectorias que podemos colorear propiamente con a lo más dos colores, los ciclos de longitud impar son 3-críticos. Por otro lado, ya que la subgráfica que obtenemos al quitarle un vértice de longitud par es 2-cromática, se sigue que los ciclos de longitud impar **no son** críticos.

Ejercicios

1. Prueba por inducción que $\chi(K_n) = n$.