Cadenas

Una *cadena* es una lista o sucesión de elementos en un orden en particular. La *longitud* de una cadena es el número de sus términos. Hay n^k cadenas de longitud k que utilizan elementos de un conjuntos de cardinalidad n. El número de cadenas en la que ningún elementos aparece más de una vez es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ o $n!/(n-k)!$. De forma más general, la *regla del producto* cuenta las cadenas de longitud k en las que el i-ésimo término puede ser escogido de n_i formas posibles. El número de tales cadenas es $n_1 n_2 \cdots n_k$

La *probabilidad* de un evento es una fracción que se define como sigue: Si hay n formas igualmente posibles en las que algo puede pasar y exactamente m de esas satisfacen cierta condición entonces la probabilidad de que se satisfaga dicha condición es m/n.

Un *reorden* de una cadena es cualquier ordenación de los elementos de la cadena, incluyendo la cadena original. Un *desorden* es un reorden de una cadena de elementos distintos en la que ningún elemento ocupa su posición original. El número D_n cuenta los desórdenes de una cadena de longitud n. Los primeros números de desórdenes son $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_4 = 9$ y $D_5 = 44$.

Combinaciones

Una *combinación* es una lista en la que el orden de los elementos no es importante. En general, una combinación puede tener elementos repetidos. El número de combinaciones que consisten de k elementos diferentes de un conjunto de n elementos está dado por el *número de combinaciones*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Los números de combinaciones aparecen en el triángulo de Pascal y satisfacen la relación

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

El número de combinaciones $\binom{n}{k}$ también cuenta los reórdenes de k A y $n-k$ B y, en consecuencia, es el coeficiente de $A^k B^{n-k}$ en la expansión de $(A+B)^n$. De forma similar, $\binom{m+n}{n}$ cuenta los reórdenes de m ceros y n unos. Además, $\binom{m+1}{n}$ cuenta los reórdenes de m ceros y n unos en las que no hay dos unos consecutivos.

El número

$$\binom{n}{k}_R = \binom{n+k-1}{k}$$

cuenta las combinaciones de longitud k tomadas de un conjunto de n elementos en las que permitimos las repeticiones, mientras que $\binom{k-1}{n-1}$ cuenta aquellas combinaciones en las que permitimos las repeticiones y que cada uno de los n elementos aparece al menos una vez.

En un *sucesión* 0*-dominada* de m ceros y n unos, cada segmento inicial[1] contiene tantos ceros como unos (es decir, al menos la mitad de las entradas son ceros). El número de tales sucesiones es

$$\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n-1}.$$

Distribuciones

En una *distribución*, a cada elemento de un primer conjunto (pensemos en un conjunto de pelotas) le asignamos un elemento de un segundo conjunto (pensemos en cajas). Hay n^m distribuciones de m pelotas diferentes en n cajas diferentes. Cada una de estas distribuciones es una función del conjunto de pelos en el conjunto de cajas y corresponde a una palabra de longitud m que usa letras de un conjunto de n elementos.

El número de distribuciones de m pelotas iguales en n cajas diferentes es $\binom{n}{m}_R = \binom{n+m-1}{m}$ si permitimos que queden cajas vacías y $\binom{m-1}{n-1}$ si no. El *número de distribuciones*

$$\binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_n} = \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_n!}$$

cuenta las distribuciones de m pelotas diferentes en n cajas diferentes tales que queden m_i pelotas en la i-ésima caja, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. El mismo número de distribución es el coeficiente de $A_1^{m_1} \cdots A_n^{m_n}$ en la expansión de $(A_1+\cdots+A_n)^m$, donde $m = m_1+\cdots+m_n$, y cuenta el número de reórdenes de una palabra de m letras que usa las letras $A_1, \ldots, A_n$, donde A_i aparece exactamente m_i veces.

[1]Un *segmento inicial* significa los primeros k términos, para alguna k. Observa que en este caso se pide para **todos** los segmentos iniciales.

Principio de inclusión/exclusión

El número de elementos en la unión de los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ está dada por la suma alternante $S_1 - \cdots \pm S_n$, donde S_k se obtiene al sumar el número de elementos en todas las intersecciones de k conjuntos A_i. Si A_i son subconjuntos de un conjunto U entonces el número de elementos de U que no están en ninguno de los A_i es

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots \pm S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k,$$

donde $\overline{A_i}$ es el complemento de A_i en U y $S_0 = |U|$. Esta fórmula, conocida como *el principio de inclusión y exclusión* tiene una gran variedad de aplicaciones, incluyendo números de desórdenes, contar enteros con propiedades particulares de divisibilidad y contar combinaciones con repeticiones limitadas.