Evalúa las sumas siguientes.

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{20}\binom{50}{i}\binom{50-i}{20-i}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{20}(-1)^i\binom{50}{i}\binom{50-i}{20-i}$

(c) $\displaystyle\sum_{i=20}^{50}\binom{50}{i}\binom{i}{20}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=20}^{50}(-1)^i\binom{50}{i}\binom{i}{20}$

Recordemos que, del ejercicio previo, sabemos que

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}. \tag{1}$$

Respuesta del inciso (a). Si hacemos $n=50$, $m=10$ y $k=i$ en la ecuación 1, tendremos que

$$\sum_{i=0}^{20}\binom{50}{i}\binom{50-i}{20-i}=\sum_{i=0}^{20}\binom{50}{20}\binom{20}{i},$$

y así:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{20}\binom{50}{20}\binom{20}{i} &= \binom{50}{20}\sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\\ &= \binom{50}{20}2^{20}.\end{aligned}$$

Respuesta del inciso (b). Si hacemos $n=50$, $m=10$ y $k=i$ en la ecuación 1, tendremos que

$$\sum_{i=0}^{20}(-1)^i\binom{50}{i}\binom{50-i}{20-i}=\sum_{i=0}^{20}(-1)^i\binom{50}{20}\binom{20}{i},$$

y así:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{20}(-1)^i\binom{50}{20}\binom{20}{i} &= \binom{50}{20}\sum_{i=0}^{20}(-1)^i\binom{20}{i}\\ &= \binom{50}{20}0^{20}=0.\end{aligned}$$

(Lo anterior porque $(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$).

Respuesta del inciso (c). Si hacemos $n = 50$, $m = i$ y $k = 20$ en la ecuación 1, tendremos que

$$\sum_{i=20}^{50} \binom{50}{i}\binom{i}{20} = \sum_{i=20}^{50} \binom{50}{20}\binom{50-20}{i-20},$$

y así:

$$\begin{aligned} \sum_{i=20}^{50} \binom{50}{20}\binom{50-20}{i-20} &= \sum_{i=20}^{50} \binom{50}{20}\binom{30}{i-20} \\ &= \sum_{j=0}^{30} \binom{50}{20}\binom{30}{j} \\ &= \binom{50}{20} \sum_{j=0}^{30} \binom{30}{j} \\ &= \binom{50}{20} 2^{30}. \end{aligned}$$

Respuesta del inciso (d). Si hacemos $n = 50$, $m = i$ y $k = 20$ en la ecuación 1, tendremos que

$$\sum_{i=20}^{50} (-1)^i \binom{50}{i}\binom{i}{20} = \sum_{i=20}^{50} (-1)^i \binom{50}{20}\binom{50-20}{i-20},$$

y así:

$$\begin{aligned} \sum_{i=20}^{50} (-1)^i \binom{50}{20}\binom{50-20}{i-20} &= \sum_{i=20}^{50} (-1)^i \binom{50}{20}\binom{30}{i-20} \\ &= \sum_{j=0}^{30} (-1)^j \binom{50}{20}\binom{30}{j} \\ &= \binom{50}{20} \sum_{j=0}^{30} (-1)^j \binom{30}{j} \\ &= \binom{50}{20} 0^{30} = 0. \end{aligned}$$