Encuentra el número de reórdenes de la palabra BANANA en las que se satisfagan las condiciones siguientes.

(a) Las dos N aparecen juntas.

(b) Cada N está seguida por una A.

(c) Las dos N están separadas.

(d) Las tres A están separadas.

Respuesta. Primero calculemos el número de reórdenes de la palabra $BANA$-NA, este correspondería a tener seis pelotas diferentes (el lugar de cada letra representa una pelota), tres cajas diferentes (que corresponden a cada letra, A, B y N) y debe cumplirse que en la caja A vayan tres pelotas, en la caja B una y en la caja N dos. Es decir, es una **distribución de tipo** (**3, 1, 2**), por lo tanto el número es

$$\binom{6}{3,1,2} = \frac{6!}{3!1!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2!} = 60.$$

Examinemos la condición (a). Podemos pensar las dos N como una sola letra, es decir, como la letra NN y, por tanto, nos preguntamos por los reórdenes de la palabra $AAABNN$. Así tendríamos cinco lugares (porque pegamos dos), con tres letras (A, B y NN), donde la primera letra aparece dos veces, la segunda una vez y la tercera una vez. Por lo tanto, es una distribución de tipo (3, 1, 1), es decir,

$$\binom{5}{3,1,1} = \frac{5!}{3!1!1!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Para la condición (b), podemos hacer lo mismo, considerar que tenemos la letra NA. Así, nos preguntamos por los reórdenes de la palabra $ABNANA$, es decir, tenemos cuatro lugares y tres letras (A, B y NA), donde la primera aparece una vez, la segunda aparece una vez y la tercera aparece dos veces. Por lo tanto, estamos buscando una distribución de (1, 1, 2). Es decir,

$$\binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!1!2!} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Para la condición (c), primero dejamos de lado las N y buscamos los reórdenes de $AAAB$, que son cuatro. Así, nos queda una palabra de la forma

$$XXXX,$$

pero nos falta por poner las dos N de forma tal que no queden juntas. Para ello, podemos intercarlar en cada uno de los reórdenes de $AAAB$, queda algo de la forma:

$$\textvisiblespace X \textvisiblespace X \textvisiblespace X \textvisiblespace X \textvisiblespace .$$

Como queremos poner dos N, tenemos que escoger dos espacios de los cinco de los que disponemos. Para eso, tenemos $\binom{5}{2}$ formas posibles. Como por cada reórden que elegimos de $AAAB$ tenemos $\binom{5}{2}$ formas de poner las N, en total tenemos

$$\frac{4!}{3!}\binom{5}{2} = 4 \cdot 10 = 40$$

formas posibles. Observa que los incisos (a) y (c) son casos complementarios, su suma debería de darnos el número total de reórdenes de la palabra $BANANA$.

Para el inciso (d), el desarrollo es similar al anterior, pero ahora buscamos los reórdenes de BNN, que son $\frac{3!}{2!} = 3$ y disponemos de cuatro espacios para colocar las tres A, es decir, tenemos $\binom{4}{3}$ formas posibles. Por lo tanto, el número total de formas son

$$\frac{3!}{2!}\binom{4}{3} = 3 \cdot 4 = 12.$$