Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas I
Segunda tarea[1]

Trimestre 2018P — Nombre: ____________________
25 de mayo de 2018 — Matrícula: ____________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

Definición 1. Si A y B son dos conjuntos, la *diferencia simétrica* de A y B se denota por $A \bigtriangleup B$ y se define como

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Si P y Q son dos proposiciones, muestra que la tabla de verdad de $P \wedge Q$ es idéntica a la tabla de verdad de $\neg(\neg P \vee \neg Q)$.

2. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, a, b\}$ y $C = \{a, \{c\}, 1, 5\}$. Encuentra:

   (i) $A \bigtriangleup B$
   (ii) $B \bigtriangleup C$
   (iii) $A \cap (B \bigtriangleup C)$
   (iv) $B \bigtriangleup A$.
   (v) $A \bigtriangleup A$
   (vi) $A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$
   (vii) $A \bigtriangleup \emptyset$
   (viii) $(A \cup C) \bigtriangleup (B \cup C)$
   (ix) $(A \cup C) \cap B$

3. Demuestra que $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

4. Demuestra que para cualesquiera conjuntos A, B y C se tiene que:

   (i) $A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$
   (ii) $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$
   (iii) $A \bigtriangleup \emptyset = A$ y $A \bigtriangleup A = \emptyset$

5. Expresa las operaciones $\cup$, $\cap$ y $\setminus$ en términos de[2]:

   (i) $\bigtriangleup$ y $\cap$,
   (ii) $\bigtriangleup$ y $\cup$ y
   (iii) $\setminus$ y $\bigtriangleup$.

[1] Versión 1

[2] «Expresar en términos de» significa que, como ejemplo, si tomamos dos conjuntos A y B, ¿existe forma de escribir el conjunto $A \cup B$ usando los conjuntos A y B y las operaciones $\bigtriangleup$ y $\cap$? Otro ejemplo, si consideramos los conectivos lógicos, podemos expresar $\wedge$ y $\rightarrow$ en términos de $\vee$ y $\neg$, $P \wedge Q$ es equivalente a $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ y $P \rightarrow Q$ es equivalente a $\neg P \vee Q$.

6. Para las siguientes relaciones binarias de $A = \{-3, -1, 0, 1, 4, 9\}$ en $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, encuentra su dominio e imagen.

   (i) $R = \{(x, y) \in A \times B \colon x = y\}$
   (ii) $T = \{(x, y) \in A \times B \colon x \neq y\}$
   (iii) $Y = \{(x, y) \in A \times B \colon x^2 = y^2\}$
   (iv) $L = \{(x, y) \in A \times B \colon x = y^2\}$

7. Sean A y B conjuntos y $f \colon A \to B$ una función. Demuestra que si $A \neq \emptyset$ entonces $B \neq \emptyset$.

8. Se define la función *parte entera* o *función piso* $\lfloor \quad \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ como

$$\lfloor x \rfloor = \text{ el mayor entero menor que o igual a } x,$$

   es decir, $\lfloor x \rfloor$ es el entero inmediato a la izquierda de x en la recta real. Calcula:

   (i) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$
   (ii) $\lfloor \frac{15}{17} \rfloor$
   (iii) $\lfloor \pi \rfloor$
   (iv) $\lfloor -2 \rfloor$
   (v) $\lfloor -\frac{18}{7} \rfloor$
   (vi) $\lfloor 0 \rfloor$

9. Se define la función *función techo* $\lceil \quad \rceil \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ como

$$\lceil x \rceil = \text{ el menor entero mayor que o igual a } x,$$

   es decir, $\lceil x \rceil$ es el entero inmediato a la derecha de x en la recta real. Calcula:

   (i) $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
   (ii) $\lceil \frac{5}{2} \rceil$
   (iii) $\lceil 2\pi \rceil$
   (iv) $\lceil 5 \rceil$
   (v) $\lceil -\pi \rceil$
   (vi) $\lceil 0 \rceil$

10. Sea

$$g = \{(1, c), (2, a), (3, c), (4, d), (5, e)\}$$

   una función de $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $Y = \{a, b, c, d, e\}$ y sea

$$f = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, w)\}$$

   una función de Y en $Z = \{w, x, y, z\}$. Escribe $f \circ g$ como un conjunto de pares ordenados.

11. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (i) Da una función $f \colon X \to Y$ tal que $f[\{a, b, c\}] = \{2, 5\}$.
   (ii) Da una función $g \colon X \to Y$ tal que $g^{-1}[\{1, 2, 5\}] = \{a, d\}$.
   (iii) Da dos funciones $f_1, f_2 \colon X \to Y$ tales que $f_1[\{a, b, c\}] = f_2[\{a, d\}]$.
   (iv) Da dos funciones $g_1, g_2 \colon X \to Y$ tales que $g_1^{-1}[\{1, 4, 5\}] = g_2^{-1}(3)$.

12. Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, da una función $f \colon X \to X$ que cumpla, simultáneamente, que:

$$f^{-1}[\{1,2,3\}] = \emptyset,\ f^{-1}[\{4,5\}] = \{1,3,7\} \text{ y } f^{-1}[\{8,10\}] = \{8,10\}.$$

13. Sea $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $g(x) = \frac{x^2}{3} - 1$, encuentra $g[\{-1, 2, 3\}]$ y $g^{-1}[\{b, d\}]$.

14. Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x^2 + 3x + 1|$, encuentra $h[\{-1, 1, 2\}]$ y $h^{-1}(1)$.

15. Da un contraejemplo para mostrar la falsedad del enunciado siguiente: si $f\colon X \to Y$ es una función entonces para cualesquiera $A_1, A_2 \subseteq X$, $f[A_1] \subseteq f[A_2]$ implica que $A_1 \subseteq A_2$.