
Matemáticas Discretas I
Cuarta tarea¹

Trimestre 2018P
22 de junio de 2018

Nombre: _____
Matrícula: _____

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. Completa la siguiente prueba por contrapositiva:

Proposición. *Para todo entero n , si $5 \nmid n^2$ entonces $5 \nmid n$.*

Demostración. Por contrapositiva, es decir, probaremos que si $5 \mid n$ entonces $5 \mid n^2$. Tomemos un entero n arbitrario tal que _____. Debemos mostrar que _____. Por definición de divisibilidad, $n = \underline{\hspace{2cm}}$ para algún entero r . Al substituir, tenemos que $n^2 = \underline{\hspace{2cm}} = 5(5k^2)$ y $5k^2$ es un entero porque es un producto de enteros. Por lo tanto, $n^2 = 5 \cdot (\text{un entero})$ y así tenemos que _____, como queríamos demostrar.

2. Prueba que si la suma de dos números reales es menor que 50 entonces alguno de los dos números es menor que 25.
3. (a) Prueba por contrapositiva: Para todos los enteros positivos n , r y s , si $rs \leq n$ entonces $r \leq \sqrt{n}$ o $s \leq \sqrt{n}$.
- (b) Prueba: Para todos los enteros $n > 1$, si n no es primo entonces existe un número primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$ y p divide a n .
- (c) Enuncia la contrapositiva del resultado de la parte (ii).

Así, tenemos lo siguiente.

Criterio de primalidad. *Dado un entero n con $n > 1$, para verificar si n es primo basta con ver si es divisible por un número primo menor o igual que su raíz cuadrada. Si no es divisible por ninguno de estos números entonces sí es un número primo.*

4. Usa el criterio de primalidad para determinar si los siguientes números son primos o no: 667, 557, 527 y 613.
5. La *criba de Eratóstenes*, así llamada por el sabio griego Eratóstenes (276–194 a. e. c.), da una manera de encontrar todos los números primos menores o iguales a un entero dado n . Para construirla, escribimos todos los enteros desde 2 hasta n . Tachamos los

¹Versión 1.

múltiplos de 2, excepto 2; luego, tachamos todos los múltiplos de 3, excepto 3; luego, todos los múltiplos de 5, excepto 5; y así. Continuamos tachando los múltiplos de cada primo siguiente hasta $\sqrt{n}$. Los números que no tachamos son los números primos desde 2 hasta n . A continuación está una criba de Eratóstenes que incluye los números desde el 2 hasta el 27. Los múltiplos de 2 están tachados con una /, los múltiplos de 3 con una \ y los múltiplos de 5 con un —.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

Usa la criba de Eratóstenes para encontrar todos los números primos menores que 100.

6. Usa el criterio de primalidad y el ejercicio anterior para determinar si los siguientes números son o no primos: (i) 9,269, (ii) 9,103, (iii) 8,623 y (iv) 7,917.
7. ¿Cuántos ceros hay al final de $45^8 \cdot 88^5$? Explica cómo puedes responder esta pregunta sin calcular el número (*Sugerencia:* $10 = 2 \cdot 5$).
8. Si n es un entero y $n > 1$ entonces $n!$ es el producto de n y cada entero positivo menor que n . Por ejemplo $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
 - (i) Escribe $6!$ en la forma factorizada estándar.
 - (ii) Escribe $20!$ en la forma factorizada estándar.
 - (iii) Sin calcular el valor de $(20!)^2$, determina cuántos ceros hay al final de este número cuando lo escribimos en forma decimal. Justifica tu respuesta.
9. En cierto pueblo, $2/3$ de los hombres adultos y $3/5$ de las mujeres adultas están casados. Suponemos que todos los matrimonios son heterosexuales y monógamos, es decir, cada uno está formado por un hombre y una mujer y no hay nadie que esté casado con más de una persona. También suponemos que hay al menos cien hombres adultos en el pueblo. ¿Cuál es el menor número posible de hombres adultos en el pueblo? ¿Y de mujeres adultas?
10. **Definición.** Dado cualquier número no negativo n , la *representación decimal* de n es una expresión de la forma

$$d_k d_{k-1} \cdots d_2 d_1 d_0,$$

donde k es un entero no negativo; $d_0, d_1, d_2, \dots, d_k$ (llamados los *dígitos decimales* de n) son enteros del 0 al 9, inclusive; $d_k \neq 0$ a menos que $n = 0$ y $k = 0$ y

$$n = d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + d_2 \cdot 10^2 + d_1 \cdot 10 + d_0.$$

Por ejemplo, $2503 = 2000 + 500 + 3 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 3$.

Prueba que si n es cualquier entero no negativo cuyo representación decimal termina en 0 entonces $5 \mid n$ (*Sugerencia.* Si la representación decimal de un entero no negativo termina en d_0 entonces $n = 10m + d_0$ para algún entero m).