Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Últimos apuntes de *Precálculo*

Funciones fraccionales lineales

Una ecuación de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

es una *fraccional lineal*. En esa ecuación, a, b, c y d son números reales. El valor a puede ser cero pero c no puede ser nunca cero (en ese caso tendrías una recta).

Sus gráficas tienen dos asíntotas (una vertical y una horizonal) y su forma es de hipérbola. Recuerden que una recta es una *asíntota* si la gráfica de la función se acerca mucho a la recta pero nunca la toca.

La asíntota vertical aparece en donde el denominador se vuelve cero, es decir, cuando $cx+d=0$. Despejando, obtenemos que $x = -\frac{d}{c}$.

La asíntota horizontal es $y = \frac{a}{c}$.

Para tener una idea más precisa de la gráfica de una función fraccional lineal, es recomendable evaluar la función para algunas x en los alrededores de la asíntota vertical.

El dominio de una función fraccional lineal son todos los reales menos la x en la que aparece la asíntota vertical y su rango son todos los reales excepto la y en la que aparece la asíntota horizontal.

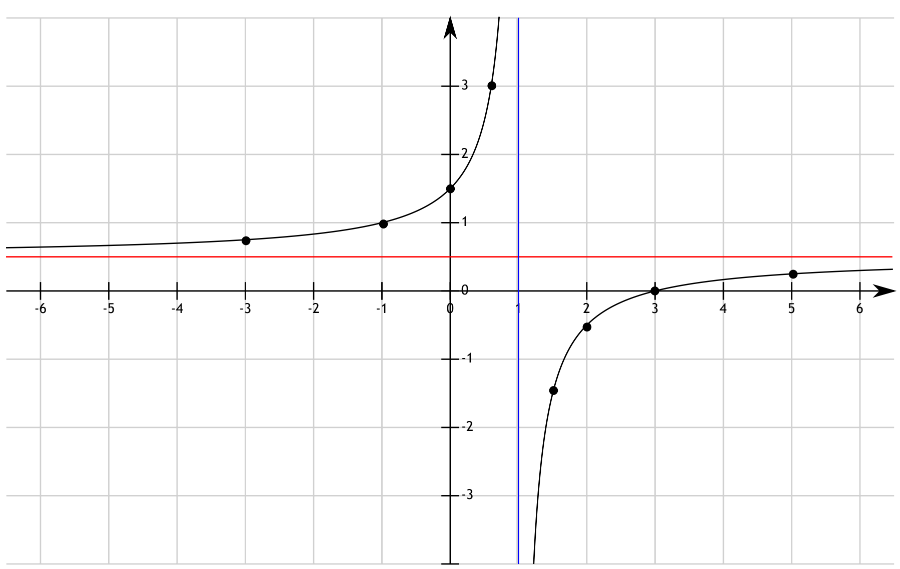
Ejemplo 1

La función $f(x) = \frac{2x-6}{4x-4}$ tiene asíntota vertical $x=1$ y asíntota horizontal $y = \frac{1}{2}$. Su dominio es $(-\infty,\, 1) \cup (1,\, \infty)$ y su rango es $(-\infty,\, 0.5) \cup (0.5,\, \infty)$.

Recordemos que la intersección-y se obtiene con $y = f(0) = \frac{2(0)-6}{4(0)-4} = \frac{3}{2} = 1.5$ y la intersección-x con $0 = \frac{2x-6}{4x-4}$, así $0 = 2x-6$. Despejando x, tenemos que $x = 3$.

$$f(x) = \frac{2x-6}{4x-4}$$

x	$y = \frac{2x-3}{4x-4}$
-3	0.75
-1	1
0	1.5
0.5	2.5
1	Asíntota
1.5	-1.5
2	-0.5
3	0
5	0.25



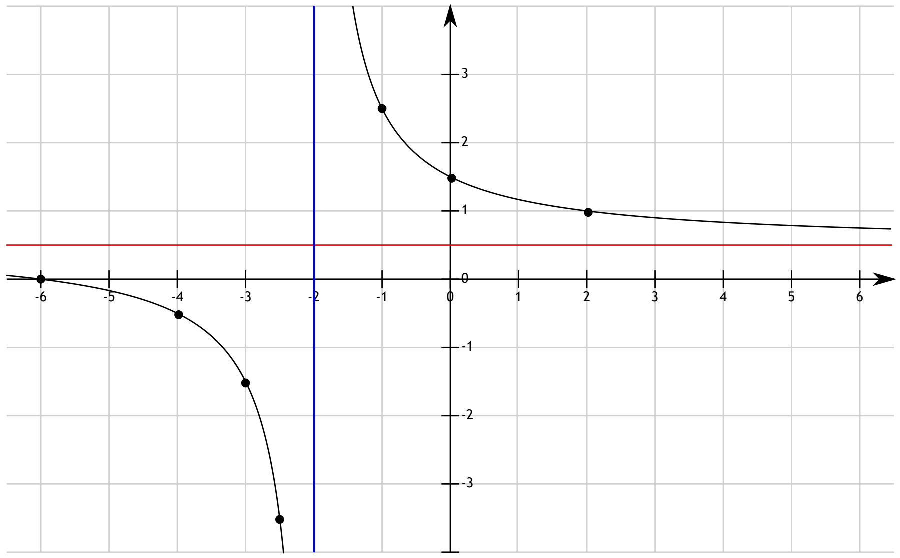
Ejemplo 2

Consideremos la función $f(x) = \frac{0.5x+3}{x+2}$. La asíntota vertical aparece cuando $x + 2 = 0$, es decir, $x = -2$ y la asíntota horizontal en $y = \frac{0.5}{1} = 0.5$. Su dominio es $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ y su rango es $(-\infty, 0.5) \cup (0.5, \infty)$.

Recordemos que la intersección-y se obtiene con $y = f(0) = \frac{0.5(0)+3}{(0)+2} = \frac{3}{2} = 1.5$ y la intersección-x con $0 = \frac{0.5x+3}{x+2}$, así $0 = 0.5x + 3$. Despejando x, tenemos que $x = -6$.

$$f(x) = \frac{0.5x+3}{x+2}$$

x	$y = \frac{0.5x+3}{x+2}$
-6	0
-4	-0.5
-3	-1.5
-2.5	-3.5
-2	Asíntota
-1.5	4.5
-1	2.5
0	1.5
2	1

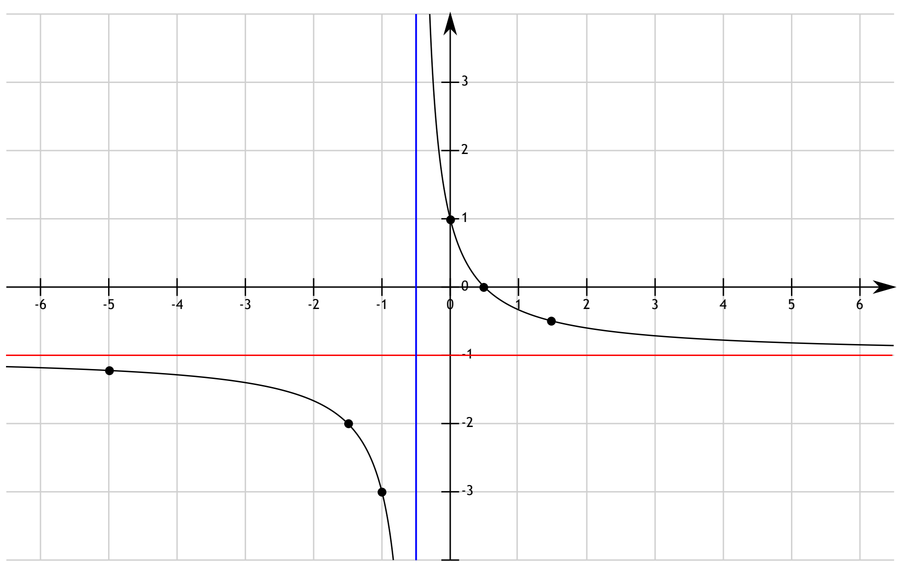


Ejemplo 3

Ahora consideremos la función $f(x) = \frac{-2x+1}{2x+1}$. La asíntota vertical aparece cuando $2x + 1 = 0$, es decir, $x = -\frac{1}{2} = -0.5$ y la asíntota horizontal en $y = \frac{-2}{2} = -1$. Su dominio es $(-\infty, -0.5) \cup (-0.5, \infty)$ y su rango es $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

$$f(x) = \frac{-2x+1}{2x+1}$$

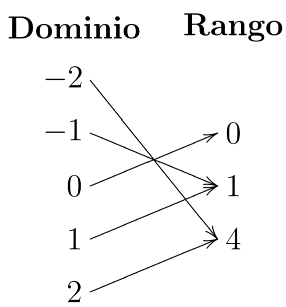
x	$y = \frac{-2x+1}{2x+1}$
-5	-1.2
-4.5	-1.25
-2.5	-1.5
-1.5	-2
-1	-3
-0.5	Asíntota
0	1
0.5	0
1.5	-1.5
2.5	$-0.\overline{6}$
3.5	-0.75
4.5	-0.8

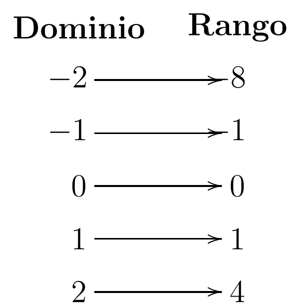


Funciones uno-a-uno y funciones invertibles

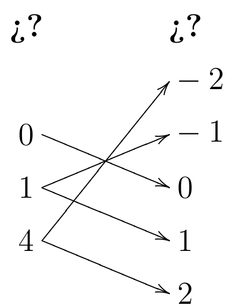
Funciones uno-a-uno

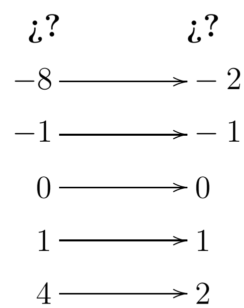
Los siguientes diagramas representan dos funciones, a la izquierda está la función x^2 y a la derecha está la función x^3, recuerda que la columna de la izquierda es el dominio y la de la derecha es el rango. La correspondencia está dada por las flechas, a cada elemento de la columna de la izquierda le corresponde el elemento que está señalado en la columna de la derecha.





Si volteamos las columnas y las flechas, obtendremos otra correspondencia, ¿siempre será una función? Como pueden ver en el ejemplo anterior, no siempre obtenemos una función. En el primer





caso no obtuvimos una función pero en el segundo. ¿Qué diferencia hay entre la función elevar al cuadrado y la función elevar al cubo? Que al elevar al cuadrado, hay elementos del dominio a los que les corresponden **el mismo** elemento en el rango pero al elevar al cubo eso no ocurre. Una función en la que no hay dos elementos del dominio a los que les corresponde el mismo elemento en el rango se llama ser *uno-a-uno* o *inyectiva*.

Observa que es diferente a la definición de función:

> Una *función* es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos de forma tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento en el segundo conjunto.
>
> Una función es *uno-a-uno* o *inyectiva* si dos elementos distintos del dominio siempre van a dar a elementos distintos del rango.

Para saber cuando una función es uno-a-uno o inyectiva, hay un criterio análogo al de la recta vertical

Teorema 1 (Criterio de la línea horizontal)**.** *Una función es uno-a-uno o inyectiva si, al graficar la función, cada línea horizontal cruza la gráfica de la función en a lo más un punto. Véase las figuras 1 y 2.*

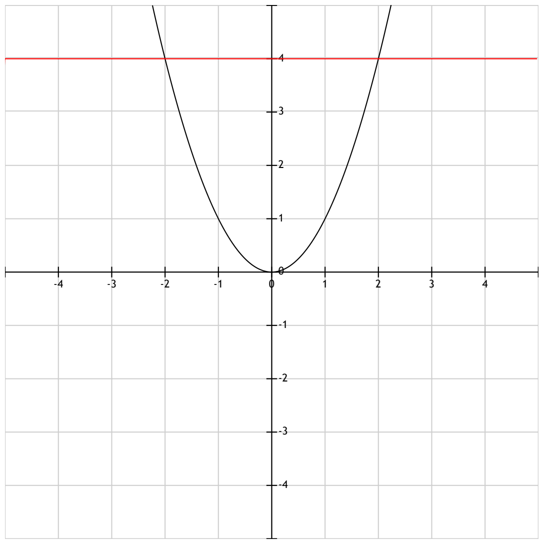


Figura 1: $f(x) = x^2$

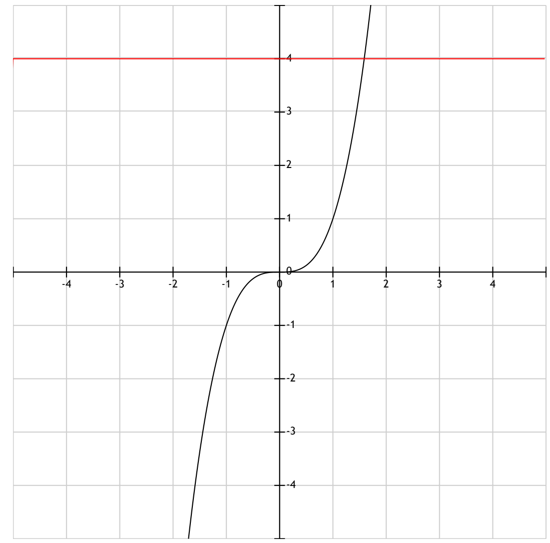


Figura 2: $f(x) = x^3$

Funciones invertibles

Dada una función f, la *función inversa* de f consiste en intercambiar el dominio, el rango y la regla de correspondencia, justo como hicimos previamente y la denotamos como f^{-1}. No todas las funciones tienen una inversa, para que la tengan las funciones **deben ser uno-a-uno**.

Para hallar la inversa de una función f seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Si la función está escrita con notación de función, como cuando aparece $f(x)$, reemplaza $f(x)$ con la letra y.

Paso 2. Intercambia x y y en la ecuación de la función.

Paso 3. Despeja y de la ecuación resultante.

Paso 4. Si la ecuación que obtienes define una función entonces la función original es uno-a-uno y la ecuación que obtuviste es la función inversa f^{-1} de f.

Por ejemplo, partimos de la función $f(x) = x^2$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 \\ y & = & x^2 \\ \mathbf{x} & = & \mathbf{y}^2 \\ \mathbf{y}^2 & = & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & = & \pm\sqrt{\mathbf{x}} \end{array} \tag{1}$$

La ecuación $y = \pm\sqrt{x}$ no es una función. Por lo tanto, la función $f(x) = x^2$ NO es uno-a-uno y no tiene función inversa.

Ahora partamos de la función $f(x) = x^3$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^3 \\ y & = & x^3 \\ \mathbf{x} & = & \mathbf{y}^3 \\ \mathbf{y}^3 & = & \mathbf{x} \\ \mathbf{y} & = & \sqrt[3]{\mathbf{x}} \end{array} \tag{2}$$

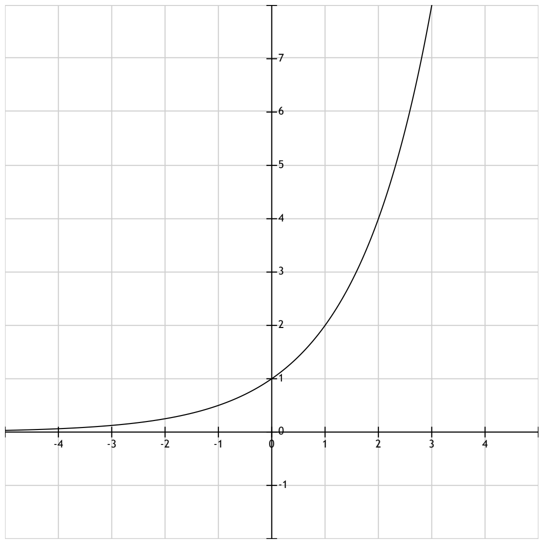


Figura 3: $f(x) = 2^x$

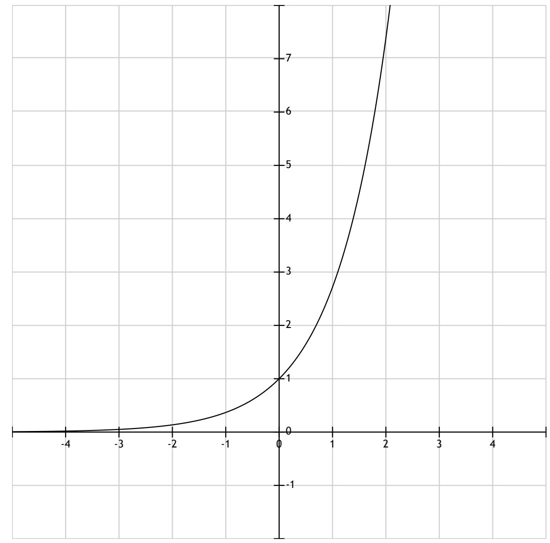


Figura 4: $f(x) = e^x$

La ecuación $y = \sqrt[3]{x}$ SÍ es una función. Por lo tanto, la función $f(x) = x^3$ SÍ es uno-a-uno y tiene función inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Es importante señalar que el dominio de la función f es el rango de su inversa f^{-1} y el rango de la función f es el dominio de su inversa $f^{(} - 1)$. Y al revés, el dominio de f^{-1} es el rango de f y el rango de f^{-1} es el dominio de f.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Hasta el momento, hemos visto funciones en los que la incógnita (es decir, la x) aparece sumando, restando, multiplicando o dividiendo. Existen funciones en las que la x aparece como exponente, por ejemplo $f(x) = 2^x$ en la figura 3. En la figura 4 aparece la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$, una de las funciones más comunes por su utilidad para modelar diferentes fenómenos. El número e es un número irracional muy importante, también conocido como *número de Euler* (se pronuncia «oiler») o *constante de Napier*. Vale aproximadamente:

$$e \approx 2.718281$$

.

Observa que las funciones exponenciales tienen las siguientes propiedades:

1. Cuando el exponente se vuelve cero, la función vale 1. En los casos que mostramos, $2^0 = 1$ y $e^0 = 1$. Si la función fuese $f(x) = 2e^{x-2}$, en $x = 2$ tenemos que $e^{2-2} = e^0 = 1$ y, por lo tanto, $f(2) = 2 \cdot 1 = 2$.

2. Cuando el exponente es positivo y crece, la función crece **muy rápidamente**.

3. Cuando el exponente es negativo y decrece, la función decrece **muy rápidamente**.

4. Las función sólo arroja valores positivos, nunca es negativa.

5. El dominio de la función $f(x) = e^x$ son todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango son todos los números reales POSITIVOS, es decir, $(0, \infty)$.

Recordemos las siguientes propiedades de los exponentes:

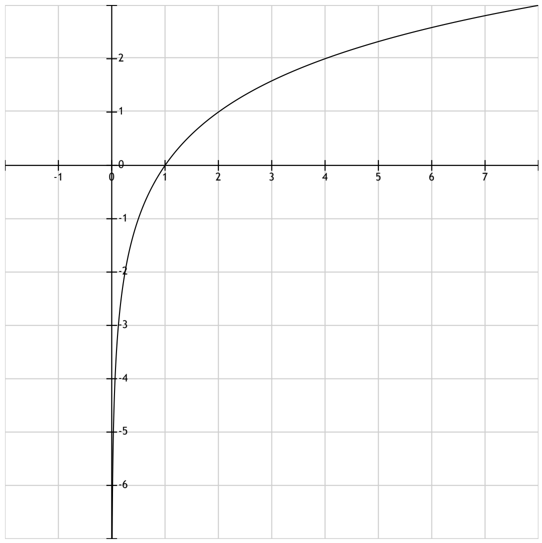


Figura 5: $f(x) = \log_2 x$

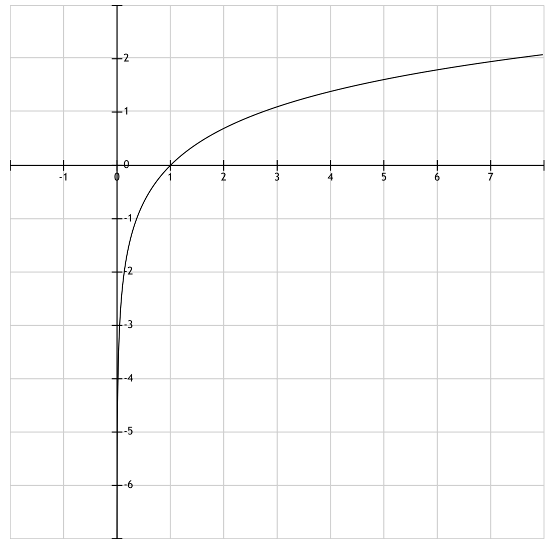


Figura 6: $f(x) = \ln x$

1. $e^{m+n} = e^m e^n$
2. $a^{m+n} = a^m a^n$
3. $e^{m-n} = \frac{e^m}{e^n}$
4. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
5. $(e^m)^n = e^{mn}$
6. $(a^m)^n = a^{mn}$

La raíz es una de las funciones inversas de la exponencial, por ejemplo, en $\sqrt[3]{8}$ nos preguntamos qué número elevado al cubo nos da ocho. El *logaritmo* es otra de las funciones inversas de la exponencial. En

$$\log_2 8$$

nos preguntamos por el número y tal que $2^y = 8$. Por lo tanto, $\log_2 8 = \mathbf{3}$ porque $2^{\mathbf{3}} = 8$. En general, el *logaritmo en base b de a es x* (y lo denotamos como $\log_b a = x$) si $b^x = a$. Los logaritmos con base e son importantes (también tienen muchas aplicaciones en modelación, como las funciones exponenciales) y en vez de denotarlos por $\log_e$, los denotamos como ln (se conocen como *logaritmos naturales*).

Como en las funciones exponenciales, tenemos las funciones logarítmicas, como $f(x) = \log_2 x$ o $f(x) = \ln x$, aparecen en las figuras 5 y 6.

Observa que las funciones logarítmicas tienen las siguientes propiedades:

1. La base a del logaritmo $\log_a x$ nunca puede ser cero o negativa.

2. En $x = 1$, las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \log_a x$ siempre valen cero, es decir, $f(1) = \ln 1 = 0$ y $g(1) = \log_a 1 = 0$.

3. Para x en el intervalo $(0,\ 1)$, las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \log_a x$ crecen **muy, muy lentamente**.

4. Para x en el intervalo $(1,\ \infty)$, las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \log_a x$ crecen **muy lentamente**.

5. El dominio de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \log_a x$ son todos los números reales POSITIVOS, es decir, $(0,\ \infty)$ y su rango todos los números reales, es decir, $(-\infty,\ \infty)$.

Guardan cierto parecido con las exponenciales, comparémoslas juntas en las figura 7 y 8, porque son mutuamente funciones inversas.

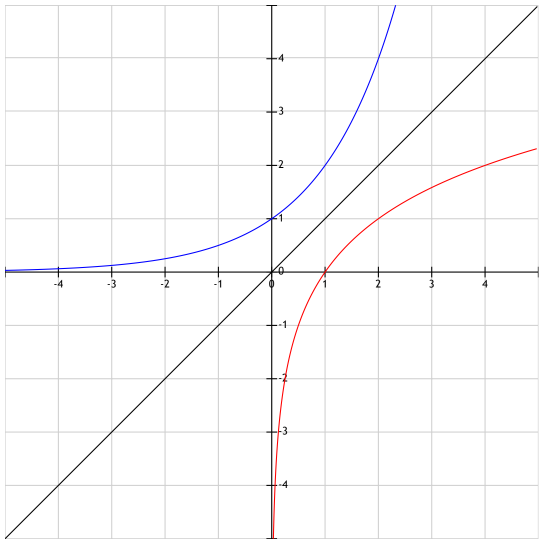


Figura 7: $g(x) = 2^x$ en azul y $f(x) = \log_2 x$ en rojo

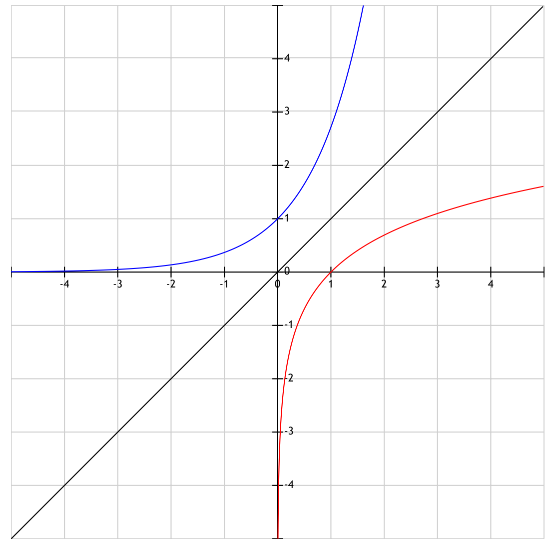


Figura 8: $g(x) = e^x$ en azul y $f(x) = \ln x$ en rojo

Los logaritmos tienen las siguiente propiedades, análogas a la de los exponentes: Recordemos las siguientes propiedades de los exponentes:

1. $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$
2. $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$
3. $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(\frac{x}{y})$
4. $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$
5. $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$
6. $\ln x^n = n \ln x$
7. $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a(x)$
8. $\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$

Finalmente, lo más importante, como son funciones inversas, tenemos que:

$$a^{\log_a x} = x \text{ y } \log_a(a^x) = x \qquad \text{y} \qquad e^{\ln x} = x \text{ y } \ln(e^x) = x.$$

Estas dos propiedades nos permiten resolver ecuaciones con exponenciales y logaritmos de la misma forma que resolvemos otras ecuaciones.

Resolvamos la siguiente ecuación exponencial.

$$\begin{array}{rcl} \frac{2^{3x}}{2^2} & = & 5 \\ 2^{3x} \cdot 2^{-2} & = & 5 \\ 2^{3x-2} & = & 5 \\ \log_2(2^{3x-2}) & = & \log_2(5) \\ 3x - 2 & = & \log_2(5) \\ 3x & = & \log_2(5) + 2 \\ x & = & \frac{\log_2(5)+2}{3} \end{array} \tag{3}$$

Probamos la solución:

$$\frac{2^{3 \cdot \frac{\log_2(5)+2}{3}}}{2^2} = \frac{2^{\log_2(5)+2}}{2^2} = 2^{\log_2(5)+2} \cdot 2^{-2} = 2^{\log_2(5)} = 5.$$

Resolvamos la siguiente ecuación logarítmica.

$$\begin{aligned} \log_{10}(x+3)+\log_{10}(x) &= 1 \\ \log_{10}((x+3)x) &= 1 \\ 10^{\log_{10}((x+3)x)} &= 10^1 \\ (x+3)x &= 10 \\ x^2+3x-10 &= 0 \\ (x+5)(x-2) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Así, $x=-5$ o $x=2$. La primera no puede ser solución, porque -5 no está en el dominio de las funciones logaritmo. Por lo tanto, la solución es $x=2$. Probamos la solución:

$$\log_{10}(2+3)+\log_{10}(2)=\log_{10}(5)+\log_{10}(2)=\log_{10}(5\cdot 2)=\log_{10}(10)=1.$$

Observen que para resolver ambas ecuaciones, primero hicimos todo lo posible para quedarnos con un solo exponente o un solo logaritmo y luego aplicamos la operación opuesta, logaritmo o exponente, respectivamente.

Modelos exponenciales

Las funciones exponenciales son muy útiles para modelar muchas cosas que naturalmente ocurren en el mundo, como crecimiento de poblaciones (de personas, animales y bacterias), decaímiento radiactivo, dispersión de epimedias, propogación de rumores, intensidad de luz, presión atmosférica y circuitos eléctricos.

El cólera, una enfermedad intestional, está causada por la bactería del cólera, que se multiplica por división celular de forma exponencial y su crecimiento está modelado por

$$A=A_0e^{1.386t},$$

donde A es el número de bacterias presentes después de t horas y A_0 es el número de bacterias presentes en el tiempo $t=0$. Si empezamos con 1 bacteria, ¿cuántas bacterias tendremos después de cinco horas, después de 12 horas y después de un día?

Para resolver la primera pregunta, tenemos que $A_0=1$ y $t=5$, al substituir, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= A_0e^{1.386t} \\ &= e^{1.386(5)} \\ &= 1,020. \end{aligned} \tag{5}$$

Para resolver la segunda pregunta, tenemos que $A_0=1$ y $t=12$, al substituir, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= A_0e^{1.386t} \\ &= e^{1.386(12)} \\ &= 1,6700,000. \end{aligned} \tag{6}$$

Para resolver la tercera pregunta, tenemos que $A_0=1$ y $t=24$, al substituir, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= A_0e^{1.386t} \\ &= e^{1.386(24)} \\ &= 279,493,000,000,000. \end{aligned} \tag{7}$$

La gráfica de la ecuación quedaría: