Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

**Matemáticas Discretas I**
**Lista de ejercicios**

Trimestre 2019I

Lee, piensa y responde con cuidado.

1. Comprueba las equivalencias siguientes.

   (a) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
   (b) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
   (c) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
   (d) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
   (e) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   (f) $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q)$

2. Da una demostración directa de las proposiciones siguientes.

   (1) Para todo entero $m$, si $m$ es par entonces $m + 7$ es impar.
   (2) Para todos los enteros $m$ y $n$, si $mn$ es impar entonces $m$ y $n$ son los dos pares o los dos impares.

3. Da una demostración por reducción al absurdo de la siguiente proposición: Para cualquier entero $n$, si $n^2$ es impar entonces $n$ es impar.

4. Dados tres conjuntos $A$, $B$ y $C$, prueba las siguientes propiedades:

   (a) $A \cap B = A$ si y sólo si $A \subseteq B$
   (b) $A \setminus B \subseteq A$
   (c) $A \setminus B = A$ si y sólo si $A \cap B = \emptyset$

5. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas y cuáles falsas? Argumenta cada respuesta.

   (a) $\emptyset \in \emptyset$.
   (b) $\emptyset \notin \emptyset$.
   (c) $\emptyset \subseteq \emptyset$.
   (d) $\emptyset \subsetneq \emptyset$.
   (e) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
   (f) $\emptyset \notin \{\emptyset\}$.
   (g) $\emptyset \subsetneq \{\emptyset\}$.
   (h) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.
   (i) $\emptyset = \{\{\emptyset\}\}$.

6. Considera una función $f\colon A \to Y$ y conjuntos $A_1,\ A_2 \subseteq X$ y $B_1,\ B_2 \subseteq Y$. Prueba los siguientes enunciados.

   (a) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$
   (b) Si $B_1 \subseteq B_2$ entonces $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$
   (c) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

7. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (i) Da una función $f\colon X \to Y$ tal que $f[\{a, b, c\}] = \{2, 5\}$.
   (ii) Da una función $g\colon X \to Y$ tal que $g^{-1}[\{1, 2, 5\}] = \{a, d\}$.
   (iii) Da dos funciones $f_1,\ f_2\colon X \to Y$ tales que $f_1[\{a, b, c\}] = f_2[\{a, d\}]$.
   (iv) Da dos funciones $g_1,\ g_2\colon X \to Y$ tales que $g_1^{-1}[\{1, 4, 5\}] = g_2^{-1}(3)$.

8. ¿Cómo se define *inyectiva*, *suprayectiva* y *biyectiva*?

9. Da un ejemplo de una función que no sea inyectiva ni suprayectiva, de una que sea inyectiva pero no suprayectiva y de una que sea suprayectiva pero no inyectiva.

10. Da dos funciones $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ y $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ que sean **biyectivas**.

11. Da una función $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ **que no sea suprayectiva pero sí inyectiva**.

12. Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, da una función $f\colon X \to X$ que cumpla, simultáneamente, que:

$$f^{-1}[\{1,2,3\}] = \varnothing,\ f^{-1}[\{4,5\}] = \{1,3,7\} \text{ y } f^{-1}[\{8,10\}] = \{8,10\}.$$

13. (a) Prueba por contrapositiva: Para todos los enteros positivos $n$, $r$ y $s$, si $rs \leq n$ entonces $r \leq \sqrt{n}$ o $s \leq \sqrt{n}$.

    (b) Prueba: Para todos los enteros $n > 1$, si $n$ no es primo entonces existe un número primo $p$ tal que $p \leq \sqrt{n}$ y $p$ divide a $n$.

    (c) Enuncia la contrapositiva del enunciado del inciso (b).

    Así, tenemos lo siguiente.

    **Criterio de primalidad**. *Dado un entero $n$ con $n > 1$, para verificar si $n$ es primo basta con ver si es divisible por un número primo menor o igual que su raíz cuadrada. Si no es divisible por ninguno de estos números entonces sí es un número primo.*

14. Usa el criterio de primalidad para determinar si los siguientes números son primos o no: 667, 557, 527 y 613.

15. ¿Cuántos ceros hay al final de $45^8 \cdot 88^5$? Explica cómo puedes responder esta pregunta sin calcular el número (*Sugerencia:* $10 = 2 \cdot 5$).

16. Si $n$ es un entero y $n > 1$ entonces $n!$ es el producto de $n$ y cada entero positivo menor que $n$. Por ejemplo $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

    (a) Escribe 6! en la forma factorizada estándar.
    (b) Escribe 20! en la forma factorizada estándar.
    (c) Sin calcular el valor de $(20!)^2$, determina cuántos ceros hay al final de este número cuando lo escribimos en forma decimal. Justifica tu respuesta.

17. Prueba que todo entero $n$ se puede escribir de alguna de las siguientes tres formas:

$$n = 3q, \qquad n = 3q + 1 \quad \text{o} \quad n = 3q + 2,$$

    para algún entero $q$.

18. Para todos los enteros $m$ y $n$, prueba cada una de las afirmaciones siguientes.

    (a) Si $n$ mód $5 = 3$ entonces $n^2$ mód $5 = 4$.

    (b) Si $m$ mód $5 = 2$ y $n$ mód $5 = 1$ entonces $mn$ mód $5 = 2$.

19. Dados tres enteros $a$, $m$ y $n$ con $0 \leq m \leq n$, prueba que $a^m \mid a^n$.

20. Prueba que cualesquiera dos enteros consecutivos tienen paridad diferente.

21. Consideremos el siguiente lema:

    **Lema.** Si $a \geq b > 0$ entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a - b)$.

    (a) (20 puntos) Prueba el lema previo.
    (b) (5 puntos) Da la tabla de seguimiento del algoritmo 1 para $A = 630$ y $B = 336$.
    (c) (5 puntos) Da la tabla de seguimiento del algoritmo 1 para $A = 768$ y $B = 348$.

**Algoritmo 1** Cálculo del mcd por medio de restas

**Entrada:** $A$, $B$ [enteros positivos]

1: [Dados dos enteros positivos $A$ y $B$, las variables $a$ y $b$ se hacen igual a $A$ y a $B$, respectivamente. Empezamos un proceso repetitivo; si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces el mayor entre $a$ y $b$ se hace igual a $a - b$ (si $a \geq b$) o a $b - a$ (si $a < b$) y el menor de $a$ o $b$ se deja sin cambio. Repetimos este proceso hasta que eventualmente $a$ o $b$ se hacen cero. Por el lema previo, después de cada repetición de este proceso tenemos que $\text{mcd}(A, B) = \text{mcd}(a, b)$. Después de la última repetición, tendremos que $\text{mcd}(A, B) = \text{mcd}(a, 0)$ o que $\text{mcd}(A, B) = \text{mcd}(0, b)$, dependiendo de cuál, entre $a$ y $b$, es cero. Pero sabemos que $\text{mcd}(a, 0) = a$ o que $\text{mcd}(0, b) = b$. Por lo tanto, después de la última repetición, tendremos que $\text{mcd}(A, B) = a$ si $a \neq 0$ o $\text{mcd}(A, B) = b$ si $b \neq 0$.]
2: $a \leftarrow A$, $b \leftarrow B$
3: **mientras** $a \neq 0$ y $b \neq 0$
4: **si** $a \geq b$ **entonces**
5: $a \leftarrow a - b$
6: **sino** $b \leftarrow b - a$
7: **fin si**
8: **fin mientras**
9: **si** $a = 0$ **entonces**
10: mcd $\leftarrow b$
11: **sino** mcd $\leftarrow a$
12: **fin si**
13: [Después de la ejecución de la instrucción **si-entonces-sino**, mcd = $\text{mcd}(A, B)$.]

**Salida:** mcd [un entero positivo]

22. Considera $a = 25$, $b = 19$ y $n = 3$.
    (a) Verifica que $3 \mid 25 - 19$.
    (b) Explica por qué $25 \equiv 19 \pmod 3$.
    (c) ¿Qué valor de $k$ satisface que $25 = 19 + 3k$?
    (d) ¿Cuál es el residuo (no-negativo) que se obtiene al dividir 25 entre 3? ¿Y cuándo dividimos 19 entre 3?
    (e) Explica por qué $25 \pmod 3 = 19 \pmod 3$.

    Considera $a = 68$, $b = 33$ y $n = 7$.
    (a) Verifica que $7 \mid 68 - 33$.
    (b) Explica por qué $68 \equiv 33 \pmod 7$.
    (c) ¿Qué valor de $k$ satisface que $68 = 33 + 7k$?
    (d) ¿Cuál es el residuo (no-negativo) que se obtiene al dividir 68 entre 7? ¿Y cuándo dividimos 33 entre 7?
    (e) Explica por qué $68 \pmod 7 = 33 \pmod 7$.

23. Prueba la *simetría* de las congruencias modulares, es decir, prueba que cualesquiera tres enteros $a$, $b$, $n$, con $n > 1$, si $a \equiv b \pmod n$ entonces $b \equiv a \pmod n$.

24. Verifica las afirmaciones siguientes.
    (a) $128 \equiv 2 \pmod 7$ y $61 \equiv 5 \pmod 7$
    (b) $(128 + 61) \equiv (2 + 5) \pmod 7$
    (c) $(128 - 61) \equiv (2 - 5) \pmod 7$
    (d) $(128 \cdot 61) \equiv (2 \cdot 5) \pmod 7$
    (e) $128^2 \equiv 2^2 \pmod 7$

    (a) $45 \equiv 3 \pmod 6$ y $104 \equiv 2 \pmod 6$
    (b) $(45 + 104) \equiv (3 + 2) \pmod 6$
    (c) $(45 - 104) \equiv (3 - 2) \pmod 6$
    (d) $(45 \cdot 104) \equiv (3 \cdot 2) \pmod 6$
    (e) $45^2 \equiv 3^2 \pmod 6$

25. Considera cinco enteros $a$, $b$, $c$, $d$ y $n$, con $n > 1$ y tales que $a \equiv c \pmod n$ y $b \equiv d \pmod n$, prueba las siguientes afirmaciones:
    (a) $(a - b) \equiv (c - d) \pmod n$
    (b) $a^2 \equiv c^2 \pmod n$

26. (a) Prueba que para todo entero $n$, con $n \geq 0$, se tiene que $10^n \equiv 1 \pmod 9$.
    (b) Utiliza la parte previa para probar que un entero positivo es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

27. (a) Calcula $26^2$ mód 55, $26^4$ mód 55, $26^8$ mód 55 y $26^{16}$ mód 55.
    (b) Calcula $26^{27}$ mód 55.

28. Calcula $89^{307}$ mód 713 y $48^{307}$ mód 713.

29. Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de las siguientes parejas de números y expresarlo como combinación lineal de los números.

    (a) 6664 y 765

    (b) 4158 y 1568

30. (A) Encuentra un inverso para 210 módulo 13.
    (B) Encuentra un inverso positivo para 210 módulo 13.
    (C) Encuentra una solución positiva para la congruencia $210x \equiv 8$ mód 13

    (a) Encuentra un inverso para 41 módulo 660.
    (b) Encuentra una solución positiva para la congruencia $41x \equiv 125$ mód 660