



Matemáticas Discretas I
Primera tarea¹

Trimestre 2019I
20 de mayo de 2019

Nombre: _____
Matrícula: _____

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. Determina el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes. El conjunto de referencia de cada proposición es el conjunto de los números reales.

(a) $\forall x(x^2 > x)$

(d) $\exists x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$

(b) $\exists x(x^2 > x)$

(e) $\forall x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$

(c) $\forall x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$

(f) $\exists x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$

2. Sean P , Q y R proposiciones. Construye una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas. ¿Cuáles de éstas son tautología?

(a) $\neg P \wedge Q$

(d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(b) $P \Rightarrow P$

(e) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

(c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(f) $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

3. Comprueba las equivalencias siguientes.

(a) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

(d) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

(b) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

(c) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

(e) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

4. Consideremos dos proposiciones P y Q , se define la *disyunción exclusiva* $\underline{\vee}$ como

$$P \underline{\vee} Q: (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

(a) Da la tabla de verdad para $\underline{\vee}$.

¹Versión 1,2

- (b) Determina si las siguientes proposiciones acerca de los números enteros es verdadera o falsa:
- (i) $[3 + 1 = 4] \vee [2 + 5 = 7]$
 - (ii) $[3 + 1 = 4] \vee [2 + 5 = 9]$
 - (iii) $[3 + 1 = 7] \vee [2 + 5 = 7]$
 - (iv) $[3 + 1 = 7] \vee [2 + 5 = 9]$
- (c) Demuestra que $P \vee Q \Leftrightarrow \neg(P \Leftrightarrow Q)$ es una tautología.
5. Justifica cada paso de la siguiente demostración directa, que prueba que si x es un número entero entonces $x \cdot 0 = 0$. Supón que los siguientes son teoremas previos:
- (1) Si a, b y c son números enteros entonces $b + 0 = b$ y $a(b + c) = ab + ac$.
 - (2) Si a, b y c son números enteros tales que $a + b = a + c$ entonces $b = c$.
- Demostración.** $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$; por lo tanto, $x \cdot 0 = 0$.
6. Da una demostración directa de las proposiciones siguientes.
- (1) Para todos los enteros m y n , si m y n son pares entonces $m + n$ es par.
 - (2) Para todos los enteros m y n , si $m + n$ es par, entonces m y n son los dos pares o los dos impares.
7. Da una demostración por contraposición de las siguientes proposiciones².
- (1) Para todo entero m , si m es par entonces $m + 7$ es impar.
 - (2) Para todos los enteros m y n , si mn es impar entonces m y n son los dos pares o los dos impares.
8. Da una demostración por reducción al absurdo de la siguiente proposición: Para cualquier entero n , si n^2 es impar entonces n es impar.

²Puedes usar las siguientes propiedades de los números enteros, considera $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Propiedades de la suma

- (1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, *propiedad asociativa*
- (2) $a + b = b + a$, *propiedad conmutativa*
- (3) $a + 0 = a$, *existencia de neutro aditivo*
- (4) Existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$, *existencia de inverso aditivo*. El número « a' » se suele denotar como « $-a$ », con lo que tendríamos que $a + (-a) = 0$.

Propiedades del producto

- (1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, *propiedad asociativa*
- (2) $a \cdot b = b \cdot a$, *propiedad conmutativa*
- (3) $a \cdot 1 = a$, *existencia de neutro multiplicativo*
- (4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, *ley distributiva del producto respecto a la suma*