Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas I
Cuarta tarea

Trimestre 2019I

Nombre: ______________________
Matrícula: ______________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta.

   (a) $6 \mid 42$
   (b) $4 \mid 50$
   (c) $16 \mid 0$
   (d) $0 \mid 15$
   (e) $14 \mid 997157$
   (f) $7 \mid 998189$

2. Considera cuatro números enteros a, b, c y d. Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsas; en caso de ser verdaderos, pruébalos y si no, da un contraejemplo.

   (a) Si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $a + c \mid b + d$.
   (b) Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid b - c$.
   (c) Si $a \nmid b$ entonces $b \nmid a$.
   (d) Si $a \nmid b$ y $b \nmid c$ entonces $a \nmid c$.
   (e) Si $a < b$ entonces $a \mid b$.
   (f) $a \mid b$ o $b \mid a$, pero no ambos.
   (g) Si $ac \mid bc$ entonces $a \mid b$.
   (h) Si $a \mid b + c$ entonces $a \mid b$.
   (i) Si $a^2 \mid b^3$ entonces $a \mid b$.
   (j) Si $a \mid b$ y $b \mid a$ entonces $a = b$.

3. Considera cuatro números enteros a, b, c y d. Demuestra las afirmaciones siguientes.

   (a) $a \mid a^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   (b) Si $ac \mid bc$ y $c \neq 0$ entonces $a \mid b$.
   (c) Si $a \mid b$ y $c \mid d$ entonces $ac \mid bd$.

4. Completa la siguiente prueba por contraposición:

   Proposición. *Para todo entero n, si $5 \nmid n^2$ entonces $5 \nmid n$.*

   Demostración. Por contrapositiva, es decir, probaremos que si $5 \mid n$ entonces $5 \mid n^2$. Tomemos un entero n arbitrario tal que __(a)__. Debemos mostrar que __(b)__. Por definición de divisibilidad, $n =$ __(c)__ para algún entero r. Al substituir, tenemos que $n^2 =$ __(d)__ $= 5(5r^2)$ y $5r^2$ es un entero porque es un producto de enteros. Por lo tanto, $n^2 = 5\cdot$(un entero) y así tenemos que __(e)__, como queríamos demostrar.

5. Prueba que si la suma de dos números reales es menor que 50 entonces alguno de los dos números es menor que 25.

6. (a) Prueba por contrapositiva: Para todos los enteros positivos n, r y s, si $rs \leq n$ entonces $r \leq \sqrt{n}$ o $s \leq \sqrt{n}$.

   (b) Prueba: Para todos los enteros $n > 1$, si n no es primo entonces existe un número primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$ y p divide a n.

   (c) Enuncia la contrapositiva del enunciado del inciso (b).

   Así, tenemos lo siguiente.

   Criterio de primalidad. *Dado un entero n con $n > 1$, para verificar si n es primo basta con ver si es divisible por un número primo menor o igual que su raíz cuadrada. Si no es divisible por ninguno de estos números entonces sí es un número primo.*

7. Usa el criterio de primalidad para determinar si los siguientes números son primos o no: 667, 557, 527 y 613.