Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas I
Sexta tarea

Trimestre 2019I

Lee, piensa y responde con cuidado.

1. Considera $a = 25$, $b = 19$ y $n = 3$.
   (a) Verifica que $3 \mid 25 - 19$.
   (b) Explica por qué $25 \equiv 19 \mod 3$.
   (c) ¿Qué valor de k satisface que $25 = 19 + 3k$?
   (d) ¿Cuál es el residuo (no-negativo) que se obtiene al dividir 25 entre 3? ¿Y cuándo dividimos 19 entre 3?
   (e) Explica por qué $25 \mod 3 = 19 \mod 3$.

   Considera $a = 68$, $b = 33$ y $n = 7$.
   (a) Verifica que $7 \mid 68 - 33$.
   (b) Explica por qué $68 \equiv 33 \mod 7$.
   (c) ¿Qué valor de k satisface que $68 = 33 + 7k$?
   (d) ¿Cuál es el residuo (no-negativo) que se obtiene al dividir 68 entre 7? ¿Y cuándo dividimos 33 entre 7?
   (e) Explica por qué $68 \mod 7 = 33 \mod 7$.

2. Prueba la *transitividad* de las congruencias modulares, es decir, prueba que cualesquiera cuatro enteros a, b, c y n, con $n > 1$, si $a \equiv b \mod n$ y $b \equiv c \mod n$ entonces $a \equiv c \mod n$.

3. Verifica las afirmaciones siguientes.
   (a) $128 \equiv 2 \mod 7$ y $61 \equiv 5 \mod 7$
   (b) $(128 + 61) \equiv (2 + 5) \mod 7$
   (c) $(128 - 61) \equiv (2 - 5) \mod 7$
   (d) $(128 \cdot 61) \equiv (2 \cdot 5) \mod 7$
   (e) $128^2 \equiv 2^2 \mod 7$

   (a) $45 \equiv 3 \mod 6$ y $104 \equiv 2 \mod 6$
   (b) $(45 + 104) \equiv (3 + 2) \mod 6$
   (c) $(45 - 104) \equiv (3 - 2) \mod 6$
   (d) $(45 \cdot 104) \equiv (3 \cdot 2) \mod 6$
   (e) $45^2 \equiv 3^2 \mod 6$

4. Considera cinco enteros a, b, c, d y n, con $n > 1$ y tales que $a \equiv c \mod n$ y $b \equiv d \mod n$, prueba las siguientes afirmaciones:
   (a) $(a - b) \equiv (c - d) \mod n$
   (b) $a^2 \equiv c^2 \mod n$

5. (a) Prueba que para todo entero n, con $n \geq 0$, se tiene que $10^n \equiv 1 \mod 9$.
   (b) Utiliza la parte previa para probar que un entero positivo es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

6. (a) Calcula $26^2 \mod 55$, $26^4 \mod 55$, $26^8 \mod 55$ y $26^{16} \mod 55$.
   (b) Calcula $26^{27} \mod 55$.

7. Calcula $89^{307} \mod 713$ y $48^{307} \mod 713$.

8. Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de las siguientes parejas de números y expresarlo como combinación lineal de los números.
   (a) 6664 y 765
   (b) 4158 y 1568

9. (a) Encuentra un inverso para 210 módulo 13.
   (b) Encuentra un inverso positivo para 210 módulo 13.
   (c) Encuentra una solución positiva para la congruencia $210x \equiv 8 \mod 13$

   (a) Encuentra un inverso para 41 módulo 660.
   (b) Encuentra una solución positiva para la congruencia $41x \equiv 125 \mod 660$