Divisibilidad entre 11

Dado un número entero con **representación decimal** $d_k d_{k-1} \cdots d_2 d_1$. Recuerda que d_0, d_1, …, d_{k-1}, d_k son los dígitos de n, cada uno es un nùmero entre cero y nueve y que cumplen que:

$$n = d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + d_2 \cdot 10^1 + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0.$$

Cualquiera de las sumas

$$d_k - d_{k-1} + d_{k-2} - \ldots$$

o

$$-d_k + d_{k-1} - d_{k-2} + \ldots$$

es la *suma alternante* de los dígitos de n. Mas aún, observa que tienen el mismo valor, pero signo diferente. Cuando elevamos -1 a alguna potencia, obtenemos que

$$\begin{aligned}(-1)^0 &= 1\\(-1)^1 &= -1\\(-1)^2 &= 1\\(-1)^3 &= -1\\&\vdots\end{aligned}$$

y, por lo tanto, una suma alternante se puede ver de la forma

$$d_k \cdot (-1)^k + d_{k-1} \cdot (-1)^{k-1} + d_{k-2} \cdot (-1)^{k-2} + \ldots + d_1 \cdot (-1)^1 + d_0 \cdot (-1)^0.$$

Recordemos las propiedades siguientes de las congruencias. Dados seis enteros a, b, c, d, m y n tales que m es un entero no-negativo, n es un entero positivo y $a \equiv c \mod n$ y $b \equiv d \mod n$, se tiene que

$$(a+b) \equiv (c+d) \mod n \tag{1}$$

$$a \cdot b \equiv c \cdot d \mod n \tag{2}$$

$$a^m \equiv c^m \mod n. \tag{3}$$

Teorema 1. *Todo número entero n es divisible entre once si y sólo si la suma alternada de sus dígitos es divisible entre once.*

Proof. Para probarlo, primero observemos que

$$10 \equiv -1 \mod 11,$$

ya que $10 - (-1) = 11$ y claramente $11 \mid 11$. □

Por la ecuación 3, para todo entero positivo p tenemos que

$$10^p \equiv (-1)^p \mod 11$$

Si $d_k d_{k-1} \cdots d_1 d_0$ es la representación decimal de n, por lo anterior sabemos que

$$\begin{aligned} 10^k &\equiv (-1)^k \mod 11 \\ 10^{k-1} &\equiv (-1)^{k-1} \mod 11 \\ &\vdots \\ 10^1 &\equiv (-1)^1 \mod 11 \\ 10^0 &\equiv (-1)^0 \mod 11 \end{aligned}$$

Por la ecuación 2, tenemos que

$$\begin{aligned} d_k \cdot 10^k &\equiv d_k \cdot (-1)^k \mod 11 \\ d_{k-1} \cdot 10^{k-1} &\equiv d_{k-1} \cdot (-1)^{k-1} \mod 11 \\ &\vdots \\ d_1 \cdot 10^1 &\equiv d_1 \cdot (-1)^1 \mod 11 \\ d_0 \cdot 10^0 &\equiv d_0 \cdot (-1)^0 \mod 11 \end{aligned}$$

Por la ecuación 1, tendríamos que

$$\begin{aligned} &d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0 \equiv \\ &\qquad d_k \cdot (-1)^k + d_{k-1} \cdot (-1)^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot (-1)^1 + d_0 \cdot (-1)^0 \mod 11. \end{aligned}$$

En la parte de la izquierda, tenemos que $n = d_k \cdot 10^k + d_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot 10^1 + d_0 \cdot 10^0$, por lo que

$$n \equiv d_k \cdot (-1)^k + d_{k-1} \cdot (-1)^{k-1} + \ldots + d_1 \cdot (-1)^1 + d_0 \cdot (-1)^0 \mod 11.$$

Y a la derecha está la suma alternante de los dígitos de n. Como ambos números son congruentes módulo 11, tenemos que si n es divisible entre once entonces su suma alternante es divisible entre once y, viceversa, si la suma alternante es divisible entre once entonces n es divisible entre once.