Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas I
Primera tarea

Trimestre 2019P Nombre: ______________________
23 de septiembre de 2019 Matrícula: ______________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. Determina el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes. El conjunto de referencia de cada proposición es el conjunto de los números reales.

   (a) $\forall x(x^2 > x)$
   (b) $\exists x(x^2 > x)$
   (c) $\forall x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$
   (d) $\exists x(x > 1 \Rightarrow x^2 > x)$
   (e) $\forall x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$
   (f) $\exists x(x > 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$

2. Sean P, Q y R proposiciones. Construye una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas. ¿Cuáles de éstas son tautología?

   (a) $\neg P \wedge Q$
   (b) $P \Rightarrow P$
   (c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
   (d) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
   (e) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
   (f) $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

3. Comprueba las equivalencias siguientes.

   (a) $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
   (b) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
   (c) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
   (d) $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
   (e) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

4. Consideremos dos proposiciones P y Q, se define la *disyunción exclusiva* $\veebar$ como

$$P \veebar Q \colon (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q).$$

   (a) Da la tabla de verdad para $\veebar$.

(b) Determina si las siguientes proposiciones acerca de los números enteros es verdadera o falsa:

(i) $[3+1=4] \veebar [2+5=7]$

(ii) $[3+1=4] \veebar [2+5=9]$

(iii) $[3+1=7] \veebar [2+5=7]$

(iv) $[3+1=7] \veebar [2+5=9]$

(c) Demuestra que $P \veebar Q \Leftrightarrow \neg(P \Leftrightarrow Q)$ es una tautología.

5. Justifica cada paso de la siguiente demostración directa, que prueba que si x es un número entero entonces $x \cdot 0 = 0$. Supón que los siguientes son teoremas previos:

   (1) Si a, b y c son números enteros entonces $b + 0 = b$ y $a(b + c) = ab + ac$.

   (2) Si a, b y c son números enteros tales que $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

   Demostración. $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$; por lo tanto, $x \cdot 0 = 0$.

6. Da una demostración directa de las proposicones siguientes.

   (1) Para todos los enterso m y n, si m y n son pares entonces $m + n$ es par.

   (2) Para todos los enteros m y n, si $m + n$ es par, entonces m y n son los dos pares o los dos impares.

7. Da una demostración por contraposición de las siguientes proposiciones[1].

   (1) Para todo entero m, si m es par entonces $m + 7$ es impar.

   (2) Para todos los enteros m y n, si mn es impar entonces m y n son los dos pares o los dos impares.

8. Da una demostración por reducción al absurdo de la siguiente proposición: Para cualquier entero n, si n^2 es impar entonces n es impar.

[1] Puedes usar las siguientes propiedades de los números enteros, considera a, b, $c \in \mathbb{Z}$.

Propiedades de la suma

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$, *propiedad asociativa*

(2) $a + b = b + a$, *propiedad conmutativa*

(3) $a + 0 = a$, *existencia de neutro aditivo*

(4) Existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$, *existencia de inverso aditivo*. El número «a'» se suele denotar como «$-a$», con lo que tendríamos que $a + (-a) = 0$.

Propiedades del producto

(1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, *propiedad asociativa*

(2) $a \cdot b = b \cdot a$, *propiedad conmutativa*

(3) $a \cdot 1 = a$, *existencia de neutro multiplicativo*

(4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, *ley distributiva del producto respecto a la suma*