Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Matemáticas Discretas I
Cuarta tarea

Trimestre 2019P Nombre: ____________________

Lee, piensa y responde con cuidado. Recuerden que **las definiciones son las importantes**.

1. Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta.

   (a) $6 \mid 42$
   (b) $4 \mid 50$
   (c) $16 \mid 0$
   (d) $0 \mid 15$
   (e) $14 \mid 997157$
   (f) $7 \mid 998189$

2. Completa la siguiente prueba por contraposición:

   Proposición. *Para todo entero n, si $5 \nmid n^2$ entonces $5 \nmid n$.*

   Demostración. Por contrapositiva, es decir, probaremos que si $5 \mid n$ entonces $5 \mid n^2$. Tomemos un entero n arbitrario tal que ___(a)___. Debemos mostrar que ___(b)___. Por definición de divisibilidad, $n =$ ___(c)___ para algún entero r. Al substituir, tenemos que $n^2 =$ ___(d)___ $= 5(5r^2)$ y $5r^2$ es un entero porque es un producto de enteros. Por lo tanto, $n^2 = 5\cdot$(un entero) y así tenemos que ___(e)___, como queríamos demostrar.

3. Prueba que si la suma de dos números reales es menor que 50 entonces alguno de los dos números es menor que 25.

4. (a) Prueba por contrapositiva: Para todos los enteros positivos n, r y s, si $rs \leq n$ entonces $r \leq \sqrt{n}$ o $s \leq \sqrt{n}$.
   (b) Prueba: Para todos los enteros $n > 1$, si n no es primo entonces existe un número primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$ y p divide a n.
   (c) Enuncia la contrapositiva del enunciado del inciso (b).

   Así, tenemos lo siguiente.

   Criterio de primalidad. *Dado un entero n con $n > 1$, para verificar si n es primo basta con ver si es divisible por un número primo menor o igual que su raíz cuadrada. Si no es divisible por ninguno de estos números entonces sí es un número primo.*

5. Usa el criterio de primalidad para determinar si los siguientes números son primos o no: 667, 557, 527 y 613.

6. Para cada uno de los siguientes valores, encuentra los enteros q y r tales que $n = dq + r$ con $0 \leq r < d$.

   (a) $n = 70$, $d = 9$
   (b) $n = 36$, $d = 40$
   (c) $n = -45$, $d = 11$
   (d) $n = 62$, $d = 7$
   (e) $n = 3$, $d = 11$
   (f) $n = -27$, $d = 8$

7. Evalúa las siguientes expresiones.

   (a) 43 div 9
   (b) 50 div 7
   (c) 28 div 5
   (d) 30 div 2
   (e) 43 mód 9
   (f) 50 mód 7
   (g) 28 mód 5
   (h) 30 mód 2

8. Considera $a = 25$, $b = 19$ y $n = 3$.

   (a) Verifica que $3 \mid 25 - 19$.
   (b) Explica por qué $25 \equiv 19 \mod 3$.
   (c) ¿Qué valor de k satisface que $25 = 19 + 3k$?
   (d) ¿Cuál es el residuo (no-negativo) que se obtiene al dividir 25 entre 3? ¿Y cuándo dividimos 19 entre 3?
   (e) Explica por qué $25 \mod 3 = 19 \mod 3$.

   Considera $a = 68$, $b = 33$ y $n = 7$.

   (a) Verifica que $7 \mid 68 - 33$.
   (b) Explica por qué $68 \equiv 33 \mod 7$.
   (c) ¿Qué valor de k satisface que $68 = 33 + 7k$?
   (d) ¿Cuál es el residuo (no-negativo) que se obtiene al dividir 68 entre 7? ¿Y cuándo dividimos 33 entre 7?
   (e) Explica por qué $68 \mod 7 = 33 \mod 7$.

9. Prueba la *transitividad* de las congruencias modulares, es decir, prueba que cualesquiera cuatro enteros a, b, c y n, con $n > 1$, si $a \equiv b \mod n$ y $b \equiv c \mod n$ entonces $a \equiv c \mod n$.

10. Verifica las afirmaciones siguientes.

    (a) $128 \equiv 2 \mod 7$ y $61 \equiv 5 \mod 7$
    (b) $(128 + 61) \equiv (2 + 5) \mod 7$
    (c) $(128 - 61) \equiv (2 - 5) \mod 7$
    (d) $(128 \cdot 61) \equiv (2 \cdot 5) \mod 7$
    (e) $128^2 \equiv 2^2 \mod 7$

    (a) $45 \equiv 3 \mod 6$ y $104 \equiv 2 \mod 6$
    (b) $(45 + 104) \equiv (3 + 2) \mod 6$
    (c) $(45 - 104) \equiv (3 - 2) \mod 6$
    (d) $(45 \cdot 104) \equiv (3 \cdot 2) \mod 6$
    (e) $45^2 \equiv 3^2 \mod 6$

11. Considera cinco enteros a, b, c, d y n, con $n > 1$ y tales que $a \equiv c \mod n$ y $b \equiv d \mod n$, prueba las siguientes afirmaciones:

    (a) $(a - b) \equiv (c - d) \mod n$
    (b) $a^2 \equiv c^2 \mod n$

12. (a) Prueba que para todo entero n, con $n \geq 0$, se tiene que $10^n \equiv 1 \mod 9$.
    (b) Utiliza la parte previa para probar que un entero positivo es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

13. (a) Calcula $26^2 \mod 55$, $26^4 \mod 55$, $26^8 \mod 55$ y $26^{16} \mod 55$.
    (b) Calcula $26^{27} \mod 55$.

14. Calcula $89^{307} \mod 713$ y $48^{307} \mod 713$.

15. Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de las siguientes parejas de números y expresarlo como combinación lineal de los números.

    (a) 6664 y 765
    (b) 4158 y 1568

16. (a) Encuentra un inverso para 210 módulo 13.
    (b) Encuentra un inverso positivo para 210 módulo 13.
    (c) Encuentra una solución positiva para la congruencia $210x \equiv 8 \mod 13$

    (a) Encuentra un inverso para 41 módulo 660.
    (b) Encuentra una solución positiva para la congruencia $41x \equiv 125 \mod 660$