Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Fundamentos de Geometría
Segunda tarea

Trimestre 2019O

Lee, piensa y responde con cuidado.

1. Si $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\angle FDC \cong \angle BDE$ y D es punto medio del segmento $\overline{BC}$, demuestra que $\overline{AF} \cong \overline{AE}$. Véase la figura 1.

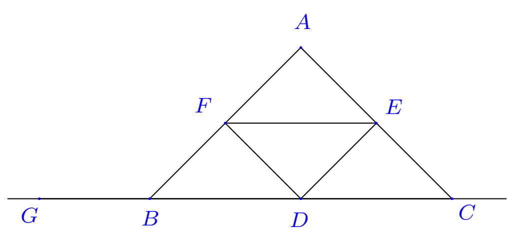

Figura 1: Ejercicio 1

2. Si sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle BCD$ equiláteros, respectivamente, demuestra que $\overline{AD} \cong \overline{EB}$. Véase la figura 2.

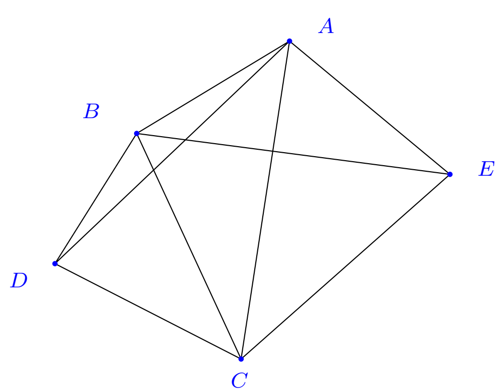

Figura 2: Ejercicio 2

3. Si $\triangle ABC$ es isósceles y $\overline{EB} \cong \overline{BD}$, demuestra que $\angle CFD$ es tres veces el ángulo $\angle CDF$.

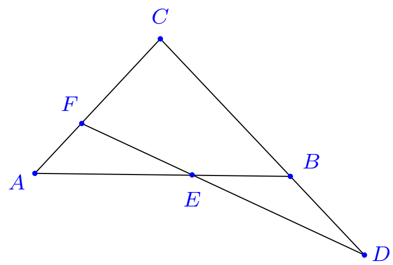

Figura 3: Ejercicio 3

4. En el círculo con centro O, $\overline{AD}$ diámetro, la línea que pasa por A y B es tangente en A y la línea que pasa por B y C es tangente en C. Demuestra que la línea OB es paralela a la línea DC. Véase la figura 4.

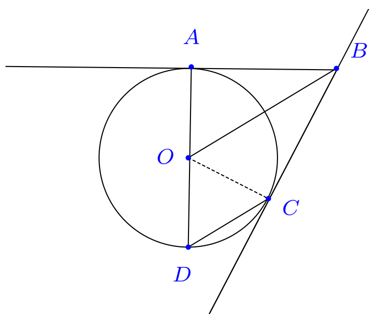

Figura 4: Ejercicio 4

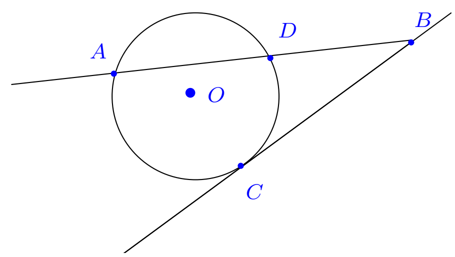

Figura 5: Ejercicio 5

5. Demuestra que un ángulo formado por una tangente y una secante de un círculo que se corta por en el exterior del mismo, mide la semidiferencia de las medidas en grados de los arcos intersectados. Es decir, que el ángulo $\angle DBC$ es igual a la mitad de la diferencia dada por el ángulo $\angle AOC$ menos el ángulo $\angle DOC$. Véase la figura 5.

6. Prueba que la hipotenusa es el lado más largo en un triángulo rectángulo.

7. ¿Un triángulo rectángulo puede tener lados de medidas dos, cinco y seis? ¿Por qué?

8. Si a, b y c son números enteros positivos que corresponden con las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con $a^2 + b^2 = c^2$ entonces forman una *terna pitagórica*. Usualmente se escriben de la forma (a, b, c). Por ejemplo, $(3, 4, 5)$ y $(5, 12, 13)$ son ternas pitagóricas.
   (a) Muestra que $(6, 8, 10)$ es una terna pitagórica.
   (b) Prueba que si (a, b, c) es una terna pitagórica entonces (ka, kb, kc) también lo es, para cualquier entero $k > 0$. ¿Qué significa geométricamente?
   (c) Muestra que $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ es una terna pitagórica para todos los enteros m y n con $m > n > 0$.

9. Supón que $\triangle ABC$ es un triángulo, donde $\overline{AB}$ es el diámetro del círculo con centro en O, como en la figura 6, y además supón que C está en el círculo. Ahora imagina que

rotas el círculo media vuelta alrededor de su centro, de forma que el triángulo $\triangle ABC$ está en una nueva posición, como aparece en la imagen. ¿Por qué lo anterior prueba que todo ángulo inscrito que subtiende un diámetro es recto?

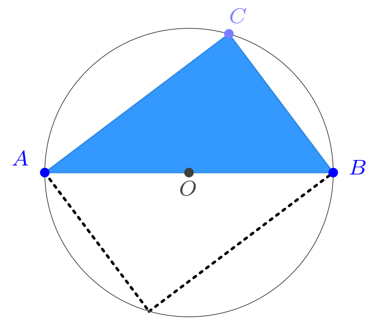

Figura 6: Ejercicio 9

10. En la figura 7, $\overline{CB}$ es un diámetro de un círculo con dos unidades de radio y centro en O, $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo y $\overline{CD}$ tiene longitud raíz de tres unidades.
    (a) Encuentra $\operatorname{sen} A$ (el seno del ángulo que tiene por vértice el punto A).
    (b) Encuentra la longitud de $\overline{AC}$.
    (c) Encuentra la longitud de $\overline{AD}$.
    (d) Argumenta porqué el área de $\triangle ABC$ es igual a $\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD}$.
    (e) Verifica que el área de $\triangle ABC$ es igual a $\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} \operatorname{sen} A$.
    (f) Verifica que el área de $\triangle ABC$ es igual a $\frac{1}{2}\overline{BC}^2 \cot A$.

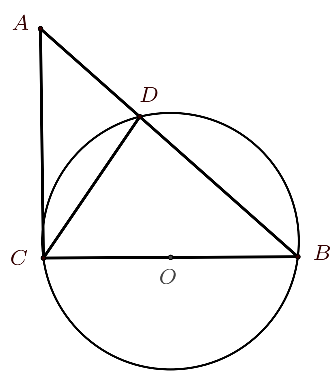

Figura 7: Ejercicio 10

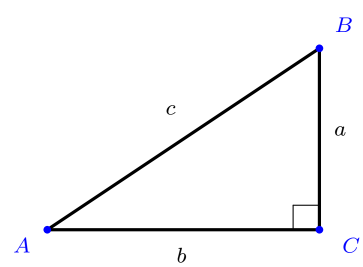

Figura 8: Ejercicio 11

11. Considera un triángulo rectángulo como el que aparece en la figura 8. Con los datos dados, encuentra el resto de sus valores.
    (a) $a = 5$, $b = 12$
    (b) $a = 2$, $B = 26°$
    (c) $c = 6$, $B = 35°$
    (d) $c = 2$, $A = 45°$

12. En la figura 9, supón que α, β y $\overline{AD}$ tienen medidas dadas. Muestra que:

(a) $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AD}}{\cot\alpha - \cot\beta}$ (b) $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AD}\cdot\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$ (c) $\overline{BD} = \dfrac{\overline{AD}\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$

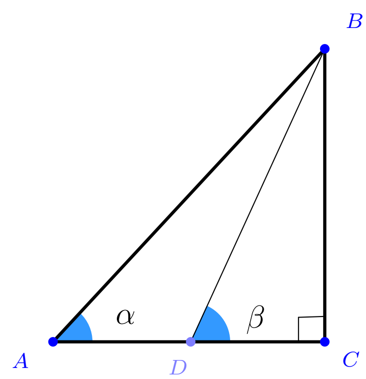

Figura 9: Ejercicio 12