

# Libro de I de los *Elementos*

Euclides

Versión elaborada por Ilán A. Goldfeder y basada en:

- M. J. Linares Altamirano, *Geometría interactiva*. Tesis de Maestría en Ciencias (Matemáticas), Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- R. Fitzpatrick, *Euclid's Elements of Geometry*, <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Euclid.html>, 2007

## Definiciones

1. Punto es aquello que no tiene partes.
2. Línea es longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Línea recta es aquella línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.
5. Superficie es aquello que tiene solamente ancho y largo.
6. Los extremos de una superficie son líneas rectas.
7. Una superficie plana es aquella que contiene una recta en cualquier posición.
8. Un ángulo plano es la inclinación entre sí de dos líneas en un mismo plano que se cortan y que no están sobre una misma línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una línea recta se levanta sobre otra formando ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos iguales se llama ángulo recto, y la recta que se eleva sobre la otra se llama perpendicular a esta otra.
11. Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.
12. Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.
13. Límite es lo que es extremo de algo.

14. Figura es aquello que está comprendido por un límite o varios.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea, que se llama circunferencia, respecto de la cual las líneas rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocado en el interior de la figura son iguales entre sí.
16. Tal punto es llamado el centro del círculo.
17. Un diámetro del círculo es cualquier recta que pase por el centro y que termina en cada dirección en la circunferencia del círculo. Tal línea recta también corta el círculo por la mitad
18. Un semicírculo es la figura comprendida entre un diámetro y la circunferencia recortada por el diámetro. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
19. Las figuras rectilíneas son aquéllas que están comprendidas por líneas rectas: las figuras triláteras (o triángulos) son las comprendidas por tres líneas rectas; cuadriláteras, las comprendidas por cuatro; multi-láteras (o polígonos), las comprendidas por más de cuatro.
20. De entre las figuras triláteras, es triángulo equilátero la que tiene tres lados iguales; isósceles la que tiene solamente dos lados iguales; escaleno la que tiene los tres lados diferentes.
21. Además, entre las figuras triláteras, es triángulo rectángulo la que tenga un ángulo recto; obtusángulo la que tenga un ángulo obtuso y acutángulo la que tenga los tres ángulos agudos.
22. De entre las figuras cuadriláteras, un cuadrado es la que es equilátera y sus ángulos son rectos; un rectángulo (oblongo) es la que tiene todos sus ángulos rectos pero no es equilátera; un rombo es la equilátera pero sin ángulos rectos, y un romboide es la que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales unos a otros pero no es equilátera ni tiene ángulos rectos. Las restantes figuras cuadriláteras son llamados trapecios o trapezoides, según que tengan un par de lados paralelos o no tengan ninguno.
23. Son rectas paralelas las que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en uno ni en el otro sentido.

## Nociones comunes

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si se añaden cosas iguales a iguales, los resultados son iguales entre sí.
3. Si se substraen iguales a iguales, los restos son iguales entre sí.

4. Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

## Postulados

1. Una línea recta se puede dibujar de cualquier punto a cualquier otro punto.
2. Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede dibujar un círculo dado un centro y un radio.
4. Todo los ángulos rectos son iguales.
5. Si una línea recta al cortar otras dos líneas rectas hace la suma de los ángulos internos del mismo lado menor que la suma de dos ángulos rectos entonces las líneas rectas, al prolongarse indefinidamente, se intersectarán del lado en el la suma de los ángulos internos del mismo lado es menor que la suma de dos ángulos rectos.

## Proposiciones

- I.1 Construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado.
- I.2 Colocar una línea recta igual a otra recta dada con un extremo en un punto dado.
- I.3 Dadas dos rectas desiguales tomar de la mayor una recta igual a la menor.
- I.4 Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente, y tienen iguales los ángulos contenidos por los lados iguales, entonces también tienen la base igual a la base, el triángulo igual al triángulo, y los ángulos restantes iguales a los ángulos restantes respectivamente, a saber aquellos opuestos a los lados iguales. (*LAL*).
- I.5 En triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y, si las rectas iguales se prolongan, los ángulos debajo de la base serán iguales entre sí.
- I.6 Si en un triángulo dos ángulos son iguales entre sí, los lados que subtienden los ángulos iguales también serán iguales entre sí.
- I.7 Dadas dos rectas construidas a partir de los extremos de una recta y encontrándose en un punto, no pueden ser construidas desde los extremos de la misma recta, y sobre el mismo lado de ella, otras dos rectas juntándose en otro punto e iguales a las dos primeras respectivamente, a saber cada una igual con aquella que parte del mismo extremo.
- I.8 Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente,

y tienen también la base igual a la base, entonces también tendrán los ángulos iguales a aquellos que están contenidos por los lados iguales. (*LLL*).

- I.9 Bisecar un ángulo rectilíneo dado.
- I.10 Bisecar una recta finita dada. Dada una recta trazar desde un punto en ella una línea recta que forme ángulos rectos.
- I.11 Dada una recta indefinida trazarle, desde un punto dado que no esté en la misma, una recta perpendicular.
- I.12 Si una recta es levantada sobre otra, entonces se crean dos ángulos rectos o dos ángulos igual a dos ángulos rectos.
- I.13 Si con cualquier recta y a partir de uno de sus puntos, dos rectas que no están colocadas del mismo lado de ella hacen que la suma de los ángulos adyacentes sea igual a dos ángulos rectos, entonces las dos rectas estarán en línea recta la una con la otra.
- I.14 Si dos rectas se cortan entre sí, entonces se crean ángulos opuestos por el vértice iguales entre sí.
- I.15 En todo triángulo, si uno de los lados es prolongado, entonces el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores y opuestos.
- I.16 En todo triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.
- I.17 En todo triángulo el lado mayor subtiende el ángulo mayor.
- I.18 En todo triángulo el ángulo mayor es subtendido por el lado mayor.
- I.19 En todo triángulo dos lados tomados a la vez, en cualquier forma, son mayores que el lado restante.
- I.20 Si sobre uno de los lados de un triángulo, desde sus extremos, se construyen dos rectas que se encuentran dentro del triángulo, las rectas así construidas serán menores que los dos lados restantes del triángulo, pero contendrán un ángulo mayor.
- I.21 Con tres rectas, que son iguales a tres rectas dadas, construir un triángulo: así es necesario que dos de las rectas tomadas a la vez en cualquier forma deberán ser mayor que la restante.
- I.22 Sobre una recta dada y en un punto sobre ella construir un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado.
- I.23 Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, pero tienen uno de los ángulos contenido por las rectas iguales mayor que el otro, ellos también tendrán la base mayor que la base.
- I.24 Si dos triángulos tienen los dos lados iguales a dos lados respectivamente, pero tienen la base mayor que la base, entonces también tendrán uno de los ángulos contenido por las rectas iguales mayor que el otro.
- I.25 Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales a dos ángulos respectiva-

mente, y un lado igual a un lado, a saber, el lado adyacente a los ángulos iguales o aquel que subtiende uno de los ángulos iguales, entonces también tendrán los lados restantes iguales a los lados restantes y el ángulo restante igual al ángulo restante. (*ALA*).

**Proposición 1.** Construir un triángulo equilátero sobre un segmento de recta dado.

Sea  $AB$  un segmento de recta dado.

Se pide construir un triángulo equilátero sobre el segmento  $AB$ .

Sean el círculo  $BCD$  con centro en  $A$  y radio  $AB$  y el círculo  $ACE$  con centro en  $B$  y radio  $BA$ . Y sean las líneas rectas  $CA$  y  $CB$  que unen el punto  $C$ , donde los círculos se intersectan, a los puntos  $A$  y  $B$ .

Ya que el punto  $A$  es el centro del círculo  $CDB$ ,  $AC$  es igual  $AB$ . También, ya que el punto  $B$  es el centro del círculo  $CAE$ ,  $BC$  es igual a  $BA$ . Por lo tanto  $CA$  y  $CB$  son cada uno iguales a  $AB$ . Pero cosas iguales a la misma cosa son iguales entre sí. Por lo tanto,  $CA$  es igual a  $CB$ . Por lo tanto, los tres segmentos  $CA$ ,  $AB$  y  $BC$  son iguales entre sí.

Por lo tanto, el triángulo  $ABC$  es equilátero y fue construido sobre el segmento dado  $AB$ , lo mismo que se pidió hacer.