Axiomas de la geometría del plano de D. Hilbert

Términos primitivos

- Punto.
- Línea.

Relaciones primitivas

- *Estar entre*, una relación ternaria entre puntos.
- *Estar en*, una relación binarias que relaciona puntos y líneas.
- *Congruencia*, dos relaciones binarias, una que relaciona segmentos de línea recty otra que relaciona ángulos.

I Axiomas de incidencia

I.1 Para cualesquiera dos puntos A y B, existe una línea que contiene tanto a A como a B.

I.2 Para cualesquiera dos puntos A y B, no existe más de un línea que contiene tanto a A como a B.

I.3 Existen al menos dos puntos en una línea. Existen al menos tres puntos que no están en la misma línea.

II Axiomas de orden

II.1 Si el punto B está entre un punto A y un punto C entonces los puntos A, B y C son tres puntos distintos en una línea y B también está entre C y A.

II.2 Para dos puntos A y C, siempre existe al menos un punto B en la línea AC tal que C está entre A y B.

II.3 Entre cualesquiera tres puntos en una línea, no existe más de uno que esté entre los otros dos.

II.4 (Axioma de Pasch). Considérense tres puntos A, B y C que no están en una línea y la línea a que no pasa por ninguno de los puntos A, B y C. Si la línea a pasa a través de un punto del segmento AB, entonces también pasa a través de un punto del segmento AC o del segmento BC. (Intuitivamente, si una línea entra a un triángulo, debe de salir).

III Axiomas de congruencia

III.1 Si A y B son dos puntos en una línea a y si A' es un punto en la misma o en otra línea a' entonces, dado un lado de A' en la línea a', siempre es posible encontrar un punto B' tal que el segmento AB es congruente con el segmento $A'B'$. En símbolos, $AB \cong A'B'$. Todo segmento es congruente consigo mismo.

III.2 Si un segmento AB es congruente con el segmento $A'B'$ y con el segmento $A''B''$ entonces el segmento $A'B'$ también es congruente con el segmento $A''B''$. Es decir, si $AB \cong A'B'$ y $AB \cong A''B''$ entonces $A'B' \cong A''B''$.

III.3 Sean AB y BC dos segmentos en una línea a que no tengan puntos en común, además de B, y sean $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos en la misma o en otra línea a' que no tengan puntos en común, además de B'. Si $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$ entonces $AC \cong A'C'$.

III.4 Sean $\angle(h,k)$ un ángulo y una línea a'. Supongamos que escogido un lado de la línea a'. Denotemos por h' el rayo sobre la línea a' que parte de un punto O' en esta línea. Entonces existe uno y sólo un rayo k' tal que el ángulo $\angle(h,k)$ es congruente con o igual al ángulo $\angle(h',k')$ y, al mismo tiempo, todos los puntos interiores del ángulo $\angle(h',k')$ caen en el lado dado de a'. Simbólicamente, $\angle(h,k) \cong \angle(h',k')$. Todo ángulo es congruente consigo mismo, es decir, $\langle(h,k) \cong \langle(h,k)$.

III.5 Si el ángulo $\angle(h,k)$ es congruente con el ángulo $\angle(h',k')$ y con el ángulo $\angle(h'',k'')$ entonces el ángulo $\angle(h',k')$ es congruente con el ángulo $\angle(h'',k'')$. Es decir, si $\angle(h,k) \cong \angle(h',k')$ y $\angle(h,k) \cong \angle(h'',k'')$ entonces $\angle(h',k') \cong \angle(h'',k'')$.

III.6 Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se satisfacen las congruencias

$$AB \cong A'B', \;\; AC \cong A'C' \text{ y } \angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

entonces la congruencia

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$$

se satisface también.

IV Axioma de Euclides

Sea a cualquier línea y A un punto que no esté en ella, entonces existe a lo más una línea en el plano, determinada por a y A, tal que pasa por A y no intersecta a a.

V Axiomas de continuidad

V.1 (Axioma de Arquímedes). Si AB y CD son cualesquiera dos segmentos entonces existe un número n tal que n segmentos CD construidos contiguamente a partir de A, a lo larto del rayo que parte de A hacia B, rebasarán a B.

V.2 (Completud). Una extensión de un conjunto de puntos en una línea junto con relaciones de orden y congruencia que preserven las relaciones existentes entre los puntos originales así como las propiedades fundamentales del orden de la línea y las congruencias que se siguen de los axiomas I-III y de V.1 es imposible.