Fundamentos de geometría

Términos primitivos

- Punto
- Línea

Relaciones primitivas

- *Estar entre*, una relación ternaria entre puntos.
- *Estar en*, una relación binarias que relaciona puntos y líneas.
- *Congruencia*, dos relaciones binarias, una que relaciona segmentos de línea y otra que relaciona ángulos.

I Axiomas de incidencia

I.1 Para cualesquiera dos puntos A y B, existe una línea que contiene tanto a A como a B.

I.2 Para cualesquiera dos puntos A y B, no existe más de un línea que contiene tanto a A como a B.

I.3 Existen al menos dos puntos en una línea. Existen al menos tres puntos que no están en la misma línea.

Teorema 1. *Dos líneas diferentes no pueden tener más de un punto en común.*

Teorema 2. *Dado un punto P, existe una línea l tal que P no está en l.*

II Axiomas de orden

II.1 Si el punto B está entre un punto A y un punto C entonces los puntos A, B y C son tres puntos distintos en una línea y B también está entre C y A.

II.2 Para dos puntos A y C, siempre existe al menos un punto B en la línea AC tal que C está entre A y B.

II.3 Entre cualesquiera tres puntos en una línea, no existe más de uno que esté entre los otros dos.

II.4 (Axioma de Pasch). Considérense tres puntos A, B y C que no están en una línea y la línea a que no pasa por ninguno de los puntos A, B y C. Si la línea a pasa a través de un punto del segmento AB, entonces también pasa a través de un punto del segmento AC o del segmento BC. (Intuitivamente, si una línea entra a un triángulo, debe de salir).

Tres o más puntos son *colineales* si existe una línea que los contiene.

Dados tres puntos colineales A, B y O, decimos que A y B *están del mismo lado de* O si no pasa que O esté entre A y B.

Proposición 3. *Existen al menos tres líneas diferentes.*

Teorema 4. *Por un punto dado pasan al menos dos líneas diferentes.*

Tres o más líneas son *concurrentes* pasan por un mismo punto.

Teorema 5. *No todas las líneas pasan por el mismo punto.*

Teorema 6. *Existen al menos tres líneas que son concurrentes.*

Teorema 7. *Toda línea se puede prolongar indefinidamente en sus dos direcciones.*

Dados dos puntos A y B, el *segmento* AB consiste de todos los puntos P tales que P está entre A y B, incluyendo A y B. En otras palabras,

$$\overline{AB} = \{P \colon P \text{ está entre } A \text{ y } B\} \cup \{A, B\}.$$

Teorema 8 (Teorema de separación de una línea)**.** *Sean l una línea y O un punto en l. El punto O divide a los puntos del conjunto $I \setminus \{O\}$ en dos conjuntos ajenos y no vacíos tales que dos puntos de un mismo conjunto determinan un segmento que no contiene a O mientras que los segmentos que determinan cualesquiera dos puntos de diferentes conjuntos siempre contienen a O.*

Dados una línea l y un punto O sobre la línea, el conjunto de los puntos que quedan a uno y a otro lado de O sobre l son las *semilíneas* o *rayos* de l determinados por O. El punto O es el *vértice* de las semilíneas.

Teorema 9 (Teorema de Pasch)**.** *Si tres puntos son colineales entonces una línea que intersecte a uno de los tres segmentos determinados por dichos puntos y no pasa por ninguno de esos puntos, intersecta a uno y sólo uno de los otros dos segmentos.*

Dados tres puntos no colineales A, B y C, el *triángulo* $\triangle ABC$ consiste de los tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Teorema 10 (Peano)**.** *Sea $\triangle\ ABC$ un triángulo. Si D y E son puntos sobre las líneas BC y AB, respectivamente, tales que E está entre A y B y D no está en el segmento BC entonces la línea DE corta el lado BC.*

Proposición 11. *Considérense tres puntos A, B y C tales que B está entre A y C. Si el punto P está entre A y B o está entre B y C entonces P está entre A y C.*

Lema 12. *Si P y Q son dos puntos del segmento AB entonces $PQ \subseteq AB$.*

Teorema 13 (Teorema de separación del plano)**.** *Cualquier línea l divide al resto del plano en dos conjuntos ajenos y no vacíos tales que dos puntos de un mismo conjunto determinan un segmento que no cruza la línea l mientras que los segmentos que determinan cualesquiera dos puntos de diferentes conjuntos siempre cruzan a l.*

Teorema 14. *Entre cualesquiera dos puntos de una línea existe un tercero.*

Teorema 15. *Todo segmento de línea contiene una infinidad de puntos.*

Corolario 16. *Toda línea contiene una infinidad de puntos.*

Corolario 17. *Por cada punto en el plano, pasan una infinidad de líneas*

Dadas dos semilíneas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ con el mismo vértice O, el *ángulo* $\angle AOB$ (o $\angle BOA$) es el conjunto $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB} \cup \{O\}$. El punto O es el vértice del ángulo.

Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son *congruentes* si:

- $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$,
- $\overline{BC} \cong \overline{QR}$,
- $\overline{AC} \cong \overline{PR}$,
- $\angle ABC \cong \angle PQR$,
- $\angle BCA \cong \angle QRP$ y
- $\angle CAB \cong \angle RPQ$.

Lo denotamos por $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

III Axiomas de congruencia

III.1 Si A y B son dos puntos en una línea a y si A' es un punto en la misma o en otra línea a' entonces existen dos puntos B' y B'' a ambos lados de A' en la línea a' tales que $AB \cong A'B'$ y $AB \cong A''B''$. Todo segmento es congruente consigo mismo.

III.2 Si un segmento AB es congruente con el segmento $A'B'$ y con el segmento $A''B''$ entonces el segmento $A'B'$ también es congruente con el segmento $A''B''$. Es decir, si $AB \cong A'B'$ y $AB \cong A''B''$ entonces $A'B' \cong A''B''$.

III.3 Sean AB y BC dos segmentos en una línea a que no tengan puntos en común, además de B, y sean $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos en la misma o en otra línea a' que no tengan puntos en común, además de B'. Si $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$ entonces $AC \cong A'C'$.

III.4 Si $\angle ABC$ es un ángulo y si $B'C'$ es un rayo entonces existen exactamente dos rayos $B'A'$ y $B'A''$, a cada lado de la línea $B'C'$, tales que $\langle A'B'C' \cong \angle ABC$ y $\langle A''B'C' \cong \angle ABC$. Más aún, cada ángulo es congruente consigo mismo.

III.5 Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se satisfacen las congruencias

$$AB \cong A'B', \; AC \cong A'C' \text{ y } \angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

entonces la congruencia

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$$

se satisface también.

Teorema 18 (Teorema de substracción de segmentos)**.** *Sean C un punto entre A y B y C' un punto entre A' y B'. Si $AB \cong A'B'$ y $AC \cong A'C'$ entonces $CB \cong C'B'$.*

Dados dos segmentos AB y CD, decimos que $AB < CD$ si existe un punto E entre C y D tal que $AB \cong CE$.

Teorema 19. *Si $AB < A'B'$ y $A'B' < A''B''$ entonces $AB < A''B''$.*

Teorema 20. *Si P y Q son dos puntos entre A y B entonces $AP < AB$, $PB < AB$ y $PQ < AB$.*

Si AB y CD son dos segmentos entonces $AB \leq CD$ si y sólo si $AB < CD$ o $AB \cong CD$.

IV Axiomas de continuidad

V.1 (Axioma de Arquímedes). Si AB y CD son cualesquiera dos segmentos entonces existe un número n tal que n segmentos CD construidos contiguamente a partir de A, a lo largo del rayo que parte de A hacia B, igualarán o rebasarán a B.

V.2 (Completud). Una extensión de un conjunto de puntos en una línea junto con relaciones de orden y congruencia que preserven las relaciones existentes entre los puntos originales así como las propiedades fundamentales del orden de la línea y las congruencias que se siguen de los axiomas I-III y de V.1 es imposible.

Axioma 21 (Axioma de Cantor)**.** *Si* $\{A_kB_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ *es una familia numerable de segmentos tales que* $A_{k+1}B_{k+1} \subseteq A_kB_k$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_kB_k \neq \varnothing$.

Teorema 22. *Si* $\{A_kB_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ *es una familia numerable de segmentos que satisfacen que*

(1) $A_{k+1}B_{k+1} \subseteq A_kB_k$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y*

(2) para cada segmento arbitrario CD*, existe un índice* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $A_kB_k < CD$

entonces la intersección $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_kB_k$ *consta de un solo punto.*

Teorema 23. *Los puntos de un segmento no son numerables.*

Demostración. Consideremos un segmento AB y supongamos que AB sin sus extremos es numerable, es decir, podemos numerar los puntos de $AB\setminus\{A, B\}$ como $\{A_k \colon k \in \mathbb{N}\}$. Primero consideremos el punto A_0, es posible encontrar un segmento P_0Q_0 contenido en $A \setminus \{A, B\}$ tal que $A_0 \notin P_0Q_0$. Procedemos de forma recursiva, *i. e.*, en el paso $k > 1$ tomamos un segmento P_kQ_k contenido en $P_{k-1}Q_{k-1}$ tal que $A_k \notin P_kQ_k$. De esta forma construimos una sucesión de segmentos P_kQ_k tales que $P_{k+1}Q_{k+1} \subseteq P_kQ_k$ y $A_k \notin P_kQ_k$, para cada número $k \in \mathbb{N}$. Según el axioma de Cantor, podemos encontrar un punto $C \in P_kQ_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $C \in AB \setminus \{A-, B\}$ y que $C \neq A_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, lo que es imposible. Por lo tanto, todo segmento en el plano tiene una cantidad no numerable de puntos. □

Axioma 24 (Axioma de Dedekind)**.** *Si un segmento* AB *se divide en dos conjuntos de forma tal que se cumplan las condiciones siguientes:*

(1) cada punto del segmento AB *pertenece a alguno de los conjuntos,*

(2) el punto A *pertenece al primero de los conjuntos y el punto* B *pertenece al segundo conjunto y*

(3) ningún punto de un conjunto está entre dos puntos del otro conjunto entonces existe un punto C en AB tal está entre todo punto del primer conjunto y todo punto del segundo conjunto.

Más resultados

Los ángulos nulos y llanos se conocen como ángulos *degenerados*.

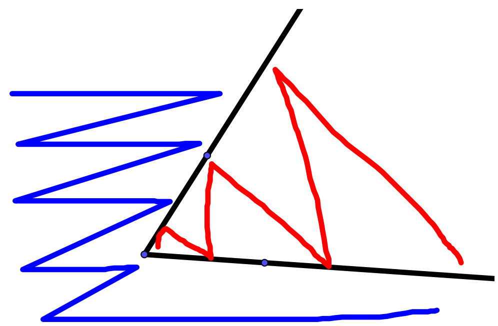

Figura 1: Interior (en rojo) y exterior (en azul) de un ángulo

Teorema 25 (Hilbert)**.** *Un ángulo no degenerado divide los puntos del plano que no están en él en dos regiones, ambas no vacías, de tal forma que en una y sólo de ellas cualesquiera dos de sus puntos determinan un segmento que no intersecta ninguno de los lados del ángulos.*

Dos ángulos con el mismo vértice se dice que son *opuestos por el vértice* si los lados de uno son las semilíneas opuestas a las semilíneas que forman los lados del otro.

Teorema 26. *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

Teorema 27. *Las bisectrices de dos ángulos suplementarios forman un ángulo recto.*