
Teoría de las Gráficas

Siguiente tarea

8.10 hrs, 5 de noviembre de 2009 (Sin prórroga)

Considera W un conjunto no-vacío y $S_1, S_2, \dots, S_n$ una familia finita y no-vacía de subconjuntos (no necesariamente distintos) de W . Un *sistema de distintos representantes* (SDR) para la familia $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ es una n -eada $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que $a_i \in S_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$, y $a_i \neq a_j$ si y sólo si $i \neq j$.

1. (a) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$S_1 = \{1, 4\}, S_2 = \{2, 5\}, S_3 = \{4\}, S_4 = \{3, 5\} \text{ y } S_5 = \{3, 5\}.$$

¿Posee la familia $(S_1, S_2, \dots, S_5)$ un sistema de distintos representantes? ¿Por qué?

- (b) Considera el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{1, 4, 5\}, S_4 = \{1, 2\} \text{ y } S_5 = \{1, 3\}.$$

¿Posee la familia $(S_1, S_2, \dots, S_5)$ un sistema de distintos representantes? ¿Por qué?

En general, dada una familia de conjuntos $(S_1, S_2, \dots, S_n)$, si existen k de ellos cuya unión tiene menos de k elementos entonces la familia no posee un sistema de representantes distintos.

2. Esto es, si existe algún $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ tal que:

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| < |I|,$$

3. Enuncia el recíproco de la afirmación anterior.
4. Representa la situación del primer problema en forma de un gráfica. (*Sugerencia.* Recuerda que la *pertenencia* es una relación sobre la clase de los conjuntos).
5. Con el Teorema de Hall, prueba que:

Teorema 1. La familia $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ de subconjuntos finitos no-vacíos de un conjunto W posee un sistema de representantes distintos si y sólo si

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| \geq |I|,$$

para todos los subconjuntos I de $\{1, 2, \dots, n\}$.

6. Considera una gráfica bipartita $G[X, Y]$. Para algún $S \subseteq X$, llama E_1 al conjunto de las aristas en G incidentes con algún vértice en S y llama E_2 al conjunto de las aristas de G incidentes con algún vértice en $N(S)$. ¿Es cierto, en general, que $E_1 \subseteq E_2$? ¿Por qué?
7. (a) Considera G una gráfica bipartita. Prueba que G posee un apareamiento perfecto si y sólo si $|S| \leq |N(S)|$.
 (b) Da un ejemplo que la condición anterior no garantiza la existencia de un apareamiento perfecto en gráficas arbitrarias.
8. Considera una gráfica bipartita $G[X, Y]$ tal que todo vértice de X es de grado impar. Supón que cualesquiera dos vértices de X tienen un número par de vecinos en común. Muestra que G posee un apareamiento que satura X .
9. Dada una gráfica G y S un subconjunto propio de los vértices de G , muestra que $o(G - S) - |S| \equiv v(G) \pmod{2}$.
10. Muestra que un árbol T tiene un apareamiento perfecto si y sólo si $o(G - v) = 1$ para todo vértice de T .
11. Dados $G[X, Y]$ una gráfica bipartita y S_1 y S_2 subconjuntos de X , muestra que:

$$|N(S_1)| + |N(S_2)| \geq |N(S_1 \cup S_2)| + |N(S_1 \cap S_2)|.$$

Extras

- A. (a) Muestra que la gráfica de Petersen tiene exactamente seis apareamientos perfectos.
 (b) Llamemos $pm(G)$ al número de apareamientos perfectos en una gráfica G . Calcula $pm(K_{2n})$ y $pm(K_{n,n})$.
- B. Muestra que toda gráfica G 2-conexa que posee un apareamiento perfecto posee al menos dos apareamientos perfectos.
 Recuerda que dados dos conjuntos S y T , la *diferencia simétrica* de S y T , $S \Delta T$, es $(S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, lo que es igual a $(S \cup T) \setminus (S \cap T)$.
- C. Considera S y T subconjuntos independientes máximos de vértices de una gráfica G . Muestra que $G[S \Delta T]$ posee un apareamiento perfecto.