Teoría de las Gráficas

Segunda tarea
3 de setiembre de 2009

1. Considera X y Y conjuntos finitos. Prueba que:

   (a) $|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|$ y

   (b) $|X \cup Y|^2 + |X \cap Y|^2 \geq |X|^2 + |Y|^2$

2. • Prueba que una gráfica G es completa si y sólo si $e(G) = \binom{v(G)}{2}$.

   • Completa la prueba (vista en clase) de que

   $$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G).$$

3. Considera G una gráfica de orden ocho y tamaño 15 en la cual cada vértice es de grado 3 ó 5. ¿Cuántos vértices de grado cinco tiene G? Dibuja una.

4. Considera H una gráfica de orden diez tal que para todo vértice v de H, $3 \leq d(v) \leq 5$. No todo vértice es par. No posee dos vértices de grado impar con el mismo grado. ¿Cuál es el tamaño de H?

5. Considera G una gráfica de orden 14 y tamaño 30 en la cual todo vértice es de grado cuatro o cinco. ¿Cuántos vértices de grado cinco posee G? Dibuja una.

6. Dibuja todas las gráficas regulares de orden n, con $n = 2, \ldots, 6$.

7. • ¿Existirá una gráfica G de orden cinco tal que $\delta(G) = 1$ y $\Delta(G) = 4$?

   • ¿Existirá una gráfica G de orden cinco tal que posee dos vértices de grado cuatro y $\delta(G) = 1$?

8. ¿Existirá una gráfica 3-regular con ocho vértices? ¿Y una 3-regular con nueve?

9. Construye una gráfica 3-regular de orden doce. ¿Cuál es su tamaño? ¿Existirá una de orden once? ¿Por qué?

10. Considera H una gráfica k-regular de orden n. Si $e(H) = 10$, encuentra todos los posible valores para k y n; y para cada caso, construye una gráfica que los satisfaga.

11. Encuentra todos los enteros n tales que $100 \leq e(K_n) \leq 200$.

12. Considera $G[X, Y]$ una gráfica bipartita, con $|X| = r$ y $|Y| = s$.

    a) Muestra que $e(G) \leq rs$.

b) Deduce que $e(G) \leq n^2/4$.

c) Describe las gráficas bipartitas G para las cuales la igualdad se tiene en (b).

13. Prueba que si G es disconexa entonces $\overline{G}$ es conexa. ¿El recíproco es cierto?

Extras

A. Considera H una gráfica de orden ocho y tamaño 13 con $\delta(H) = 2$ y $\Delta(H) = 4$ Denota por n_i el número de vértices en H de grado i, donde $i = 2, 3, 4$. Supón que $n_3 \geq 1$. Encuentra todas las posibles soluciones para (n_2, n_3, n_4). Para cada una de tus respuestas, construye una gráfica que los satisfaga.

B. Supón que G es una gráfica k-regular de orden n y tamaño m, con $k \geq 0$, $m \geq 0$ y $n \geq 1$. Encuentra una relación entre k, n y m. Justifica tu respuesta.

C. Prueba que si G es autocomplementaria (es decir, $G \cong \overline{G}$) entonces

$$v(G) \equiv 0, 1 \pmod 4$$

D. Considera G una gráfica de orden n tal que para ninguna terna de vértices u, v, w se tiene que uv, vw, wu son todas aristas de G (lo anterior es equivalente a decir que G es K_3-*libre*, es decir, que G no posee a K_3 como subgráfica). Muestra que

$$n \geq \delta(G) + \Delta(G).$$

E. Toma $n \geq 2$ puntos en el plano tal que la distancia entre cualesquiera dos de esos puntos es al menos uno. Prueba que existen a lo más $3n$ pares de esos vértices a distancia exactamente uno.