# Teoría de las Gráficas

Tarea anterior a la décima
8.10 hrs, 12 de noviembre de 2009 (Sin prórroga)

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y por qué?
   (a) Si $G$ posee un paseo euleriano cerrado entonces no posee vértices de corte.
   (b) Si $G$ posee un paseo euleriano cerrado entonces no posee puentes (*i.e.*, aristas de corte).
   (c) Si $G$ posee un paseo euleriano cerrado, es de orden impar y $\overline{G}$ es conexa entonces $\overline{G}$ posee también un paseo euleriano cerrado.
2. Para que enteros $p \geq q$, $K_{p,q}$ posee un paseo euleriano abierto.
3. Considera $H$ una subgráfica generadora de una gráfica $G$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta o no y por qué?
   (a) Si $H$ posee un paseo euleriano cerrado entonces $G$ posee un paseo euleriano cerrado.
   (b) Si $H$ posee un paseo euleriano abierto entonces $G$ posee un paseo euleriano abierto.
   (c) Si $H$ posee un ciclo hamiltoniano entonces $G$ posee un ciclo hamiltoniano.
4. Muestra que si una gráfica satisface la condición de Dirac entonces también satisface la condición de los grados de Pósa.
5. Prueba que toda gráfica con sucesión de grados $(2, 3, 3, 4, 4, 5, 5)$ y toda gráfica con sucesión de grados $(4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6)$ contienen un ciclo hamiltoniano, pese a que no satisfacen la condición de los grados de Pósa.
6. Supón que agregamos una arista a $G$ que no tenía antes, uniendo dos vértices $u$ y $v$ no adyacentes en $G$ y que la gráfica con la nueva arista posee un ciclo hamiltoniano. Entonces ¿qué existe necesariamente en $G$?
7. (a) Encuentra una gráfica con sucesión de grados $(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4)$ que no tiene un ciclo hamiltoniano.
   (b) Prueba que toda gráfica con la sucesión de grados previa debe poseer una trayectoria hamiltoniana.
8. Encuentra un ejemplo de una gráfica con tres o más vértices que sea regular, conexa, bipartita y que no posea ciclos hamiltonianos.

**Teorema 1** (Teorema de Ore). *Dada $G$ una gráfica con $n$ vértices, donde $n \geq 3$, que satisface la condición de adyacencia de Ore, a saber, siempre que $d(u)+d(v) < n$ para cualesquiera dos vértices $u$ y $v$ entonces $u$ y $v$ son adyacentes. Entonces $G$ posee un ciclo hamiltoniano.*

9. Prueba con el Teorema de Bondy-Chvátal el Teorema de Ore.

10. Encuentra una gráfica que satisfaga la condición de los grados de Pósa pero no la condición de adyacencia de Ore.

11. Considera $G$ una gráfica con un paseo euleriano abierto y con un ciclo hamiltoniano, llamemos a este último $C$. Supón que $v(G) = 12$, $e(G) = 17$, $\delta(G) = 2$ y $\Delta(G) = 4$.

    (a) ¿Cuántos vértices de grado tres puede tener $G$?

    (b) ¿Cuántos vértices de grado dos tiene $G$?

    (c) Construye una gráfica que satisfaga lo anterior.

    (d) Supón que todos los vértices de grado impar son adyacentes en $G$, pero que ninguno de los vértices de grado dos son adyacentes entre sí. ¿Qué puedes decir sobre la estructura de la subgráfica inducida por el conjunto de vértices de grado cuatro en $G$?

12. Considera una gráfica $G$ con un paseo euleriano abierto y que posee posee $C$ un ciclo hamiltoniano. Supón que $v(G) = 7$, $e(G) = 12$, $\delta(G) = 2$, $\Delta(G) = 5$ y que $G$ posee exactamente dos vértices de grado dos.

    (a) Encuentra el número de vértices de grado cuatro y el número de vértices de grado cinco en $G$.

    (b) Supón que los dos vértices de grado dos son adyacentes en $C$. Construye todas las posibles gráficas que lo satisfagan.

13. Prueba que $\alpha(G) \leq \frac{v(G)}{2}$ para cualquier gráfica $G$ que posea un ciclo hamiltoniano.

**Extras**

A. Considera $G$ una gráfica de orden ocho y tamaño diez con un paseo euleriano cerrado.

   (a) Determina el máximo valor posible para $\Delta(G)$ y construye todas las gráficas que lo alcancen.

   (b) Supón que $\Delta(G) =: 4$

      i. Determina el número de vértices de grado cuatro en $G$.

      ii. Supón que ninguno de los vértices de grado cuatro son adyacentes. Construye todas las posibles gráficas que satisfagan lo anterior.

B. Dado un tablero de ajedrez (de ocho por ocho), asociémosle una gráfica de la siguiente manera: por cada cuadro pongamos un vértice y dos vértices son adyacentes si y sólo si sus cuadros correspondientes son adyacentes vertical u horizontalmente en el tablero. Dado cualquier cuadrícula de $m \times n$ podemos asociarle una gráfica. Prueba que tales gráficas poseen un ciclo hamiltoniano si y sólo si $m$ o $n$ es par.