Teoría de las Gráficas

Siguiente tarea
8.10 hrs, 5 de noviembre de 2009 (Sin prórroga)

Dos (u, v)-trayectorias P y Q son *internamente ajenas* si y sólo si $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$. $\mathrm{p}(u, v)$ denota al máximo número de (u, v)-trayectorias internamente ajenas en una gráfica, siempre que $u \neq v$ (de otra forma, el número no está definido). Si u y v están en la misma componente (conexa) de una gráfica G, $\mathrm{c}(u, v)$ denota el mínimo número de vértices que debo borrar de G para desconectar a u de v. Nota que $u \neq v$ y uv no es arista de la gráfica, pues de otra forma el número no está definido. La *conexidad (puntual)* de G se denota por $\kappa(G)$ y se define como:

$$\kappa(G) := \min\{\mathrm{p}(u, v) : u \neq v\}.$$

Teorema 1 (Teorema de Menger). *Dada una gráfica G y vértices u, v no-adyacentes en G, el máximo número de (u, v)-trayectorias internamente ajenas dos a dos es igual al mínimo número de vértices que desconectan a u de v, es decir,*

$$\mathrm{p}(u, v) = \mathrm{c}(u, v).$$

Teorema 2 (Teorema de Whitney). *Si G posee al menos un par de vértices no adyacentes entonces*

$$\kappa(G) = \min\{\mathrm{p}(u, v) : u \neq v, uv \notin E(G)\}.$$

Una gráfica G se dice k-conexa si $k \leq \kappa(G)$.

Recuerda, si una gráfica es k-conexa entonces siempre que le borre menos de k vértices, la gráfica no se desconecta. (¿Cómo sería en contrapositiva?)

1. Considera G una gráfica k-conexa. Toma $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| \geq k$. Construye la siguiente gráfica H. Primero, agrégale un vértice y que no esté en G y únelo con todos los vértices de S, es decir,

   $$H := (V(G) \cup \{y\}, E(G) \cup \{yu : u \in S\}.$$

   Prueba que H es k-conexa. (*Sugerencia.* Prueba que al quitar cualquier conjunto de $k - 1$ vértices, la gráfica no se desconecta.)

   Si X, Y son subconjuntos de vértices de G, una (X, Y)-trayectoria P es una trayectoria en G cuyo vértice inicial pertenece a X y cuyo vértice final pertenece a Y.

2. Considera G una gráfica y X, Y subconjuntos de vértices de G con al menos k vértices cada uno. Entonces existe una familia de k (X, Y)-trayectorias ajenas en G.

   Una familia de k (x, Y)-trayectorias internamente ajenas cuyos vértices terminales son diferentes es conocido como un k-ventilador (*k-fan*) de x a Y.

3. Considera G una gráfica k-conexa, x un vértice de G y $Y \subseteq V(G) \setminus \{x\}$ un conjunto de al menos k vértices de G. Entonces existe un k-ventilador en G de x a Y.

4. Si S es un conjunto de k vértices en una gráfica k-conexa G, con $k \geq 2$, entonces existe un ciclo que contiene todos los vértices de S. Prueba lo siguiente:

   (a) Pruébalo por inducción. Primero, para $k = 2$.
   (b) Supón que $k \geq 3$. Considera $x \in S$ y define $T := S \setminus \{x\}$.
   (c) G es $(k-1)$-conexa. ¿Por qué existe un ciclo C tal que $T \subseteq V(C)$?
   (d) Define $Y := V(C)$. Podemos suponer que $x \notin Y$, ¿por qué?
   (e) Si $|Y| \geq k$ entonces existe un k-ventilador de x a Y, ¿por qué?
   (f) T divide a C en $k-1$ segmentos ajenos en aristas (argumenta).
   (g) Dos extremos del ventilador, P y Q, terminan en el mismo segmento. ¿Por qué?
   (h) Muestra el ciclo pedido.
   (i) Si $|Y| = k-1$, construye un ventilador adecuado y muestra el ciclo.
   (j) ¿Puede pasar que $|Y| \leq k-1$?
   (k) Concluye.

5. Prueba que toda gráfica 3-conexa no bipartita tiene al menos cuatro ciclos de longitud impar.

Extras

A. Muestra que si G es k-conexa y e es cualquier arista de G entonces G/e (colapsar la arista e) es $(k-1)$-conexa.

B. Para cada $k \geq 4$, encuentra una gráfica k-conexa G diferente de K_{k+1} tal que $\kappa(G/e) = k-1$ para toda arista e de G.