Teoría de las Gráficas

Sexta tarea
8 de octubre de 2009

1. Considera T un árbol de orden quince tal que $1 \leq d(v) \leq 4$ para cada vértice v en T. Supón que T contiene exactamente nueve hojas y exactamente tres vértices de grado cuatro. ¿Cuántos vértices de grado tres tiene T? Justifica tu respuesta y dibuja un árbol que satisfaga lo anterior.

2. Los grados de los vértices de un árbol T de orden dieciocho son uno, dos y cinco. Si T posee exactamente cuatro vértices de grados dos, ¿cuántas hojas tiene G?

3. Considera T un árbol y n_i el número de vértices de grado i en T. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdadera?
   - Si T no es una trayectoria entonces $n_1 \geq n_2$.
   - Si $n_2 = 0$ entonces T tiene más hojas que otros vértices.

4. Considera T un árbol de orden n. Muestra que los vértices de T siempre pueden ser nombrados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma tal que cada x_i posee uno y sólo un vecino en $\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\}$, para $i = 2, 3, \ldots, n$.

   Un *esqueleto* T de una gráfica G es una subgráfica generadora de G tal que la intersección de T con cada componente conexa de G es un árbol.

5. Denotemos por $\mathrm{cp}(G)$ el número de vértices de corte de una gráfica G. Prueba que:
   - si e es un arista que pertence a un ciclo de G entonces $\mathrm{cp}(G) \leq \mathrm{cp}(G - e)$;
   - $\mathrm{cp}(G) \leq \mathrm{cp}(T)$ para cualquier esqueleto T de G.
   - $\mathrm{cp}(G) \leq v(G) - 2$ y
   - si $\mathrm{cp}(G) = v(G) - 2$ entonces G es una trayectoria.

6. Una arista ab es una *diagonal* de un ciclo C si $a, b \in V(C)$ y $ab \notin E(C)$. Prueba que una arista e de un bloque G es una diagonal de un ciclo en G si y sólo si $G - e$ es un bloque.

7. Considera una gráfica conexa G y un vértice v en G tal que $N(v)$ es conexo. Entonces $G - v$ es conexa.

8. Prueba que si $\delta(G) \geq v(G) - 2$ entonces $\kappa(G) = \delta(G)$.

9. Considera G una gráfica conexa no trivial sin vértices de corte. X y Y dos subconjuntos de vértices de G, no necesariamente ajenos, cada uno de cardinalidad al menos dos. Muestra que existen dos (X, Y)-trayectorias **ajenas** en G.

10. Considera G una gráfica y x, y dos vértices de G no adyacentes (y, por lo tanto, distintos). Si toda (x, y)-trayectoria tiene longitud dos entonces

$$\mathrm{p}(x, y) = \mathrm{c}(x, y).$$

11. En la prueba del Teorema de Menger vista en clase, considera la gráfica G/Y resultante de colapsar Y en un vértice y y T un subconjunto de los vértices de G/Y que no incluya a y. Si existe una (x, y)-trayectoria P en G que no pase por T entonces la subgráfica P/Y de G/Y contiene una (x, y)-trayectoria que no pasa por T.

Extras

A. Prueba que un árbol posee exactamente dos hojas si y sólo si es una trayectoria.

B. Considera T un árbol de orden k. Muestra que si G es una gráfica con $\delta(G) \geq k - 1$ entonces T es isomórfico a alguna subgráfica de G.

C. (Vale dos preguntas.) Si G es un bloque tal que $G - a - b$ es disconexa para cualquier par de vértices no adyacentes a, b. Prueba que G es un ciclo.