Teoría de las Gráficas

Primera tarea
27 de agosto de 2009

1. Define una gráfica G tal que $V(G) = \{2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$ y dos vértices u y v son adyacentes si y sólo si $\mathrm{mcd}(u, v) = 1$. Dibújala y determina $e(G)$.

2. Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $|i - j| \leq 3$. Dibuja la gráfica G y determina $e(G)$.

3. Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i + j$ es múltiplo de cuatro. Dibuja la gráfica G y determina $e(G)$.

4. Considera G una gráfica con $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$, tal que dos números i y j en $V(G)$ son adyacentes si y sólo si $i \cdot j$ es múltiplo de diez. Dibuja la gráfica G y determina $e(G)$.

5. Encuentra la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia de la siguiente gráfica G (Figura 1).

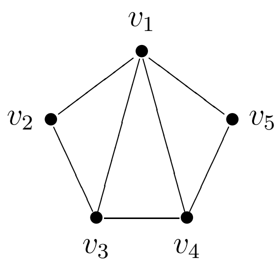

Figura 1: G

6. $\mathbf{X}$ es la matriz de adyacencia de la gráfica G. Dibújala.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. El número

$$d(G) := \frac{1}{v(G)} \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

es el *grado promedio* de G. Muestra **con todo detalle** que

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

8. (a) Prueba con detalle que toda en toda gráfica G existen al menos dos vértices que poseen el mismo grado.
   (b) Muestra que, en cualquier grupo de dos o más personas, siempre existen dos personas que poseen el mismo número de amigos dentro del grupo.
   (c) Describe un grupo de cinco personas, en el cual cualesquiera dos de sus miembros tienen exactamente un amigo en común. ¿Puedes encontrar un grupo de cuatro personas con la misma propiedad?

9. Dibuja las once gráficas no isomórficas con cuatro vértices.

10. Dada una gráfica G, se define el *complemento* de G (denotado como $\overline{G}$) como la gráfica con:
    - $V(G) = V(\overline{G})$ y
    - $(u, v) \in E(\overline{G})$ si y sólo $(u, v) \notin E(G)$ (siempre que $u \neq v$).

    (a) Muestra que $\overline{G}$ es también una gráfica.
    (b) Si $H \leq G$ ¿entonces $\overline{H} \leq \overline{G}$?
    (c) Una gráfica es *autocomplementaria* si $G \cong \overline{G}$. Dibuja todas las gráficas autocomplementarias de orden menor o igual que cinco.

Extra. Prueba que G_1 y G_2 (Figuras 2 y 3) no son isomórficas.

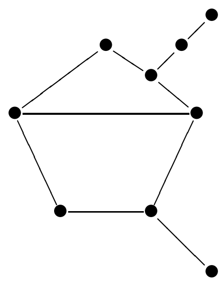

Figura 2: G_1

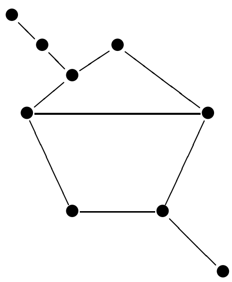

Figura 3: G_2