Teoría de las Gráficas I

Segunda clase clase

Ilán A. Goldfeder

D.R. Ilán A. Goldfeder
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

17 de agosto de 2007

Esbozo

Gráfica

Definición

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto arbitrario, los *vértices* de G, y $E(G)$ es una relación binaria sobre $V(G)$ antireflexiva y simétrica,las *aristas* de G.

Gráfica

Definición

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto arbitrario, los *vértices* de G, y $E(G)$ es una relación binaria sobre $V(G)$ antireflexiva y simétrica,las *aristas* de G.

Gráfica

Definición

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto arbitrario, los *vértices* de G, y $E(G)$ es una relación binaria sobre $V(G)$ antireflexiva y simétrica, las *aristas* de G.

Gráfica

Definición

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto arbitrario, los *vértices* de G, y $E(G)$ es una relación binaria sobre $V(G)$ antireflexiva y simétrica,las *aristas* de G.

Subgráfica

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica* de G (y lo denotaremos por $H \leq G$) si y sólo si

- $V(H) \subseteq V(G)$ y
- $E(H) \subseteq E(G) \cap (V(H) \times V(H))$.

La última condición nos asegura que H sea una gráfica, de otra forma podría tener aristas "flotando", esto es, cuyos extremos no sean parte de H. Si H es subgráfica de G pero no sean iguales, diremos que H es *subgráfica propia* de G y lo denotaremos por $H < G$.

Subgráfica

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica* de G (y lo denotaremos por $H \leq G$) si y sólo si

- $V(H) \subseteq V(G)$ y
- $E(H) \subseteq E(G) \cap (V(H) \times V(H))$.

La última condición nos asegura que H sea una gráfica, de otra forma podría tener aristas "flotando", esto es, cuyos extremos no sean parte de H. Si H es subgráfica de G pero no sean iguales, diremos que H es *subgráfica propia* de G y lo denotaremos por $H < G$.

Subgráfica

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica* de G (y lo denotaremos por $H \leq G$) si y sólo si

- $V(H) \subseteq V(G)$ y
- $E(H) \subseteq E(G) \cap (V(H) \times V(H))$.

La última condición nos asegura que H sea una gráfica, de otra forma podría tener aristas "flotando", esto es, cuyos extremos no sean parte de H. Si H es subgráfica de G pero no sean iguales, diremos que H es *subgráfica propia* de G y lo denotaremos por $H < G$.

Subgráfica

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica* de G (y lo denotaremos por $H \leq G$) si y sólo si

- $V(H) \subseteq V(G)$ y
- $E(H) \subseteq E(G) \cap (V(H) \times V(H))$.

La última condición nos asegura que H sea una gráfica, de otra forma podría tener aristas "flotando", esto es, cuyos extremos no sean parte de H. Si H es subgráfica de G pero no sean iguales, diremos que H es *subgráfica propia* de G y lo denotaremos por $H < G$.

Subgráfica

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica* de G (y lo denotaremos por $H \leq G$) si y sólo si

- $V(H) \subseteq V(G)$ y
- $E(H) \subseteq E(G) \cap (V(H) \times V(H))$.

La última condición nos asegura que H sea una gráfica, de otra forma podría tener aristas "flotando", esto es, cuyos extremos no sean parte de H. Si H es subgráfica de G pero no sean iguales, diremos que H es *subgráfica propia* de G y lo denotaremos por $H < G$.

Subgráfica inducida

Dada una gráfica G, tomemos $S \subseteq V(G)$. Existen diferentes subgráficas de G cuyos vértices son S pero ¿cuál es la más parecida a G? No sería G si pedimos que S sea subconjunto propio de $V(G)$. Las subgráficas que poseen dicha propiedad se llaman *subgráficas inducidas*.

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica inducida* de G si y sólo si

$$E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H)).$$

Si tomamos $S \subseteq V(G)$ podemos pensar en la subgráfica inducida cuyos vértices sean exactamente S. Tal gráfica se denota por $G[S]$. Explícitamente tenemos que

$$G[S] := (S, E[G] \cap (S \times S)).$$

Subgráfica inducida

Dada una gráfica G, tomemos $S \subseteq V(G)$. Existen diferentes subgráficas de G cuyos vértices son S pero ¿cuál es la más parecida a G? No sería G si pedimos que S sea subconjunto propio de $V(G)$. Las subgráficas que poseen dicha propiedad se llaman *subgráficas inducidas*.

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica inducida* de G si y sólo si

$$E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H)).$$

Si tomamos $S \subseteq V(G)$ podemos pensar en la subgráfica inducida cuyos vértices sean exactamente S. Tal gráfica se denota por $G[S]$. Explícitamente tenemos que

$$G[S] := (S, E[G] \cap (S \times S)).$$

Subgráfica inducida

Dada una gráfica G, tomemos $S \subseteq V(G)$. Existen diferentes subgráficas de G cuyos vértices son S pero ¿cuál es la más parecida a G? No sería G si pedimos que S sea subconjunto propio de $V(G)$. Las subgráficas que poseen dicha propiedad se llaman *subgráficas inducidas*.

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica inducida* de G si y sólo si

$$E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H)).$$

Si tomamos $S \subseteq V(G)$ podemos pensar en la subgráfica inducida cuyos vértices sean exactamente S. Tal gráfica se denota por $G[S]$. Explícitamente tenemos que

$$G[S] := (S, E[G] \cap (S \times S)).$$

Subgráfica inducida

Dada una gráfica G, tomemos $S \subseteq V(G)$. Existen diferentes subgráficas de G cuyos vértices son S pero ¿cuál es la más parecida a G? No sería G si pedimos que S sea subconjunto propio de $V(G)$. Las subgráficas que poseen dicha propiedad se llaman *subgráficas inducidas*.

Definición

Dada una gráfica G, diremos que H es *subgráfica inducida* de G si y sólo si

$$E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H)).$$

Si tomamos $S \subseteq V(G)$ podemos pensar en la subgráfica inducida cuyos vértices sean exactamente S. Tal gráfica se denota por $G[S]$. Explícitamente tenemos que

$$G[S] := (S, E[G] \cap (S \times S)).$$

Subgráfica generadora

Dadas gráficas $H \leq G$ siempre pasa que

$$H \leq G[V(H)] \leq G.$$

Cuando pase que $G[V(H)] = G$ diremos que H es una subgráfica generadora de G. Lo anterior es equivalente a pedir que

$$V(H) = V(G)$$

Así, escribamos.

Definición

H es una subgráfica *generadora* de G si y sólo si

$$V(H) = V(G).$$

Subgráfica generadora

Dadas gráficas $H \leq G$ siempre pasa que

$$H \leq G[V(H)] \leq G.$$

Cuando pase que $G[V(H)] = G$ diremos que H es una subgráfica generadora de G. Lo anterior es equivalente a pedir que

$$V(H) = V(G)$$

Así, escribamos.

Definición

H es una subgráfica *generadora* de G si y sólo si

$$V(H) = V(G).$$

Subgráfica generadora

Dadas gráficas $H \leq G$ siempre pasa que

$$H \leq G[V(H)] \leq G.$$

Cuando pase que $G[V(H)] = G$ diremos que H es una subgráfica generadora de G. Lo anterior es equivalente a pedir que

$$V(H) = V(G)$$

Así, escribamos.

Definición

H es una subgráfica *generadora* de G si y sólo si

$$V(H) = V(G).$$

Isomorfismo

Definición

Dadas dos gráficas G y H, un *isomorfismo* entre G y H consiste en:

- una función biyectiva $\phi : G \to H$ tal que
- $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$.

Definición

Diremos que dos gráficas G y H son *isomórficas* (y lo denotamos por $G \cong H$) y sólo si existe un isomorfismo entre ellas.

Isomorfismo

Definición

Dadas dos gráficas G y H, un *isomorfismo* entre G y H consiste en:

- una función biyectiva $\phi : G \to H$ tal que
- $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$.

Definición

Diremos que dos gráficas G y H son *isomórficas* (y lo denotamos por $G \cong H$) y sólo si existe un isomorfismo entre ellas.

Isomorfismo

Definición

Dadas dos gráficas G y H, un *isomorfismo* entre G y H consiste en:

- una función biyectiva $\phi : G \to H$ tal que
- $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$.

Definición

Diremos que dos gráficas G y H son *isomórficas* (y lo denotamos por $G \cong H$) y sólo si existe un isomorfismo entre ellas.

Isomorfismo

Definición

Dadas dos gráficas G y H, un *isomorfismo* entre G y H consiste en:

- una función biyectiva $\phi : G \to H$ tal que
- $(u, v) \in E(G)$ si y sólo si $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$.

Definición

Diremos que dos gráficas G y H son *isomórficas* (y lo denotamos por $G \cong H$) y sólo si existe un isomorfismo entre ellas.

Propiedades de los isomorfismos

La relación *ser isomórfica* es:

- reflexiva, es decir, toda gráfica es isomórfica consigo misma ($G \cong G$),
- simétrica, si G es isomórfica a H entonces H es isomórfica a G ($G \cong H$ implica que $H \cong G$) y
- es transitiva, es decir, si G es isomórfica a H y H es isomórfica a F entonces G es isomórfica a H ($G \cong H \cong F$ implca que $G \cong H$).

Así, la relación de ser isomórfica es de equivalencia e induce una partición en la clase de todas las gráficas. Nos interesa estudiar aquellas propiedades que no varían entre gráficas isomórficas.

Propiedades de los isomorfismos

La relación *ser isomórfica* es:

- reflexiva, es decir, toda gráfica es isomórfica consigo misma ($G \cong G$),
- simétrica, si G es isomórfica a H entonces H es isomórfica a G ($G \cong H$ implica que $H \cong G$) y
- es transitiva, es decir, si G es isomórfica a H y H es isomórfica a F entonces G es isomórfica a H ($G \cong H \cong F$ implca que $G \cong H$).

Así, la relación de ser isomórfica es de equivalencia e induce una partición en la clase de todas las gráficas. Nos interesa estudiar aquellas propiedades que no varían entre gráficas isomórficas.

Propiedades de los isomorfismos

La relación *ser isomórfica* es:

- reflexiva, es decir, toda gráfica es isomórfica consigo misma ($G \cong G$),
- simétrica, si G es isomórfica a H entonces H es isomórfica a G ($G \cong H$ implica que $H \cong G$) y
- es transitiva, es decir, si G es isomórfica a H y H es isomórfica a F entonces G es isomórfica a H ($G \cong H \cong F$ implca que $G \cong H$).

Así, la relación de ser isomórfica es de equivalencia e induce una partición en la clase de todas las gráficas. Nos interesa estudiar aquellas propiedades que no varían entre gráficas isomórficas.

Propiedades de los isomorfismos

La relación *ser isomórfica* es:

- reflexiva, es decir, toda gráfica es isomórfica consigo misma ($G \cong G$),
- simétrica, si G es isomórfica a H entonces H es isomórfica a G ($G \cong H$ implica que $H \cong G$) y
- es transitiva, es decir, si G es isomórfica a H y H es isomórfica a F entonces G es isomórfica a H ($G \cong H \cong F$ implca que $G \cong H$).

Así, la relación de ser isomórfica es de equivalencia e induce una partición en la clase de todas las gráficas. Nos interesa estudiar aquellas propiedades que no varían entre gráficas isomórficas.

Propiedades de los isomorfismos

La relación *ser isomórfica* es:

- reflexiva, es decir, toda gráfica es isomórfica consigo misma ($G \cong G$),
- simétrica, si G es isomórfica a H entonces H es isomórfica a G ($G \cong H$ implica que $H \cong G$) y
- es transitiva, es decir, si G es isomórfica a H y H es isomórfica a F entonces G es isomórfica a H ($G \cong H \cong F$ implca que $G \cong H$).

Así, la relación de ser isomórfica es de equivalencia e induce una partición en la clase de todas las gráficas. Nos interesa estudiar aquellas propiedades que no varían entre gráficas isomórficas.

Vecindad y grado de un vértice

Dada una gráfica G y un vértice v de G, podemos separar al resto de los vértices de G (es decir, a $V(G) \setminus \{v\}$ en dos conjuntos: los que son adyacentes a v y los que no son adyacentes a v. Al primer conjunto se le llama la *vecindad* de v en G y se denota por $N(v)$. A la cardinalidad de la vecindad de v en G se le llama el *grado* o *valencia* de v en G y se le denota por $d(v)$. De otra forma, el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él.

Vecindad y grado de un vértice

Dada una gráfica G y un vértice v de G, podemos separar al resto de los vértices de G (es decir, a $V(G) \setminus \{v\}$ en dos conjuntos: los que son adyacentes a v y los que no son adyacentes a v. Al primer conjunto se le llama la *vecindad* de v en G y se denota por $N(v)$. A la cardinalidad de la vecindad de v en G se le llama el *grado* o *valencia* de v en G y se le denota por $d(v)$. De otra forma, el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él.

Vecindad y grado de un vértice

Dada una gráfica G y un vértice v de G, podemos separar al resto de los vértices de G (es decir, a $V(G) \setminus \{v\}$ en dos conjuntos: los que son adyacentes a v y los que no son adyacentes a v. Al primer conjunto se le llama la *vecindad* de v en G y se denota por $N(v)$. A la cardinalidad de la vecindad de v en G se le llama el *grado* o *valencia* de v en G y se le denota por $d(v)$. De otra forma, el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él.