Teoría de las Gráficas II

Tarea tercera

1. Da el valor de $\chi'(K_n)$ y pruébalo, para cualquier entero n positivo.

2. Usa el teorema visto en clase para probar el Teorema de Vizing-Gupta.

   Teorema 1 (Teorema de Vizing-Gupta)**.** *El número cromático lineal de cualquier gráfica es Δ ó $\Delta + 1$.*

3. Supongamos que q denota el número de aristas de una gráfica. Prueba que:

   (a) para cualquier gráfica, $\alpha' \geq \frac{q}{\Delta+1}$ y que

   (b) para cualquier gráfica bipartita con $\Delta \geq 1$, $\alpha' \geq \frac{q}{\Delta}$.

4. Usa el Teorema de König sobre coloración de aristas para probar que toda gráfica bipartita k-regular con $k \geq 1$ posee un apareamiento perfecto.

   Sea G cualquier gráfica bipartita y M cualquier apareamiento en G. Supondremos que los vértices de G están acomodados en dos líneas, una encima de la otra, y que cada arista tiene un extremo en cada línea.

   La *digráfica coloreada* D correspondiente a M se construye con las siguientes reglas:

   Dirección de las aristas. Asignemos una dirección a cada aristas de G. Las flechas correspondientes aristas en M van para arriba. Las otras, para abajo.

   Esto nos arroja una digráfica a partir de la gráfica G. Observa que todo camino dirigido en esta digráfica alterna entre aristas para arriba y aristas para abajo y, por lo tanto, alterna entre aristas que están en M y aristas que no están en M.

   Coloración de los vértices. Los vértices saturados en la línea de arriba son azules, los vértices saturados abajo son rojos y todos los vértices no saturados son verdes.

   Construyamos el siguiente conjunto de vértices de S de D: S contiene todos los vértices verdes, todos los vértices azules que se pueden alcanzar en D desde algún vértice verde (por medio de una trayectoria dirigida) y todos los vértices rojos que no se pueden alcanzar en D desde algún vértice verde.

   En general, el conjunto S construido a partir de un apareamiento dado es independiente si y sólo si el apareamiento es maximal. Más aún, siempre que el apareamiento no sea maximal existe un algoritmo simple que lo crece.

   Dado P una trayectoria de un vértice verde a otro vértice verde en la digráfica coloreada construida a partir del apareamiento dado M en una gráfica bipartita entonces M puede ser aumentada a un apareamiento más grande quitando todos las aristas de M en P y añadiendo todas las aristas de P que no están en M.

5. ¿Por qué funciona el algoritmo previo? Prueba que obtienes un apareamiento y que contiene una arista más que M.

   El algoritmo anterior prueba cómo un apareamiento no maximal puede ser aumentado siempre que existe una trayectoria de un vértice verde a otro vértice verde en la digráfica coloreada correspondiente. Sin embargo, ¿esa trayectoria siempre existe?

   Teorema 2. *Las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

   (i) M es maximal,

   (ii) D no contiene una trayectoria entre dos vértices verdes y

   (iii) S es un conjunto independiente.

6. Prueba que (i) implica (ii).

7. Prueba que (ii) implica (iii). Considera todas las posibilidades de vértices que pueden ser adyacentes en S: verde y verde, verde y rojo, azul y verde, azul y rojo unidos por una flecha que ve hacia arriba y azul y rojo unidos por una flecha que ve hacia abajo.

8. Prueba que (iii) implica (i). Si S es independiente entonces M es maximal. Muestra que:

   (a) $\alpha' \geq p - q$ y $\alpha' \geq m$

   (b) La igualdad debe darse en el ítem anterior, ¿por qué?

   (c) ¿Por qué esto muestra que M es maximal?

9. Por lo tanto, tenemos el Teorema de König-Egervary.

10. En cualquier representación plana de una gráfica bipartita aplanable, todos los grados de las caras deben ser pares. ¿Por qué?

11. Muestra que no puede existir una gráfica bipartita 4-regular plana.

12. (a) Encuentra un ejemplo de una gráfica conexa que posee $(4, 4, 4, 4, 4, 2, \ldots)$ como sucesión de vértices pero no es una subdivisión de K_5 (diferente de Petersen).

    (b) La misma pregunta pero para $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, \ldots)$ y $K_{3,3}$.

13. Muestra que S es un conjunto independiente en una gráfica G si y sólo si $V(G) \setminus S$ es una cubierta de G.

14. Muestra que para todo k y todo l enteros positivos,

$$r(k, l) = r(l, k).$$

15. Prueba que para todos los enteros positivos t_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$r(t_1, t_2, \ldots, t_k) \leq r(t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k) + r(t_1, t_2 - 1, \ldots, t_k) + \ldots + r(t_1, t_2, \ldots, t_k - 1) - k + 2.$$

16. Supón que queremos encontrar un flujo maximal en una red con múltiples fuentes o pozos. ¿Qué significa? Cómo puedes resolver el problema:
    (a) añadiendo algo a la red,
    (b) sin añadir nada a la red.