Teoría de las Gráficas

Décima (y última) tarea
10 de junio de 2009

Tarea preliminar. Faltan los ejercicios dejados en clase (supón que son n). De esta tarea, responde $10 - n$. Más, no contarán (excepto, obvio, el extra.)

Una gráfica dibujada en el plano es una *representación* de la gráfica. Las Figuras 1 y 2 son dos representaciones distintas en el plano de K_4. Aquélla tiene un cruce mientras ésta no. El *número de cruces* de una representación es el número de pares diferentes de aristas que se intersecan; el número de cruce $\nu(G)$ de una gráfica G es el mínimo de los números de cruces de todas las representaciones de G en el plano. Así, una representación es *plana* si no tiene cruces. En otras palabras, una gráfica G es *plana* si $\nu(G) = 0$. La Figura 2 muestra que K_4 es plana.

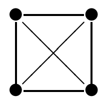

Figura 1: Una representación en el plano de K_4

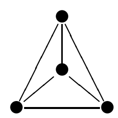

Figura 2: Otra representación en el plano de K_4

Supón que G es plana. Si construimos una nueva gráfica insertando un nuevo vértice de grado dos "en medio" de una arista (*división de una arista*) o borrando un vértice de grado dos y uniendo sus dos vértices adyacentes (*elidir un vértice*), esa nueva gráfica también será plana. Gráficas que pueden ser obtenidas de otra por estas operaciones se llaman *homeomorfas*.

Ya que K_5 y $K_{3,3}$ no son planas, se sigue que una gráfica que tiene una de ellas como subgráfica no puede ser plana. Más aún, una gráfica que es homeomórfica a una que posea una *subgráfica* homeomórfica a K_5 ó $K_{3,3}$ no puede ser plana. Kuratowski probó que esta condición necesaria para la planaridad también es necesaria.

Teorema 1 (Kuratowski, 1930). *G es plana si y sólo G es homeomórfica a una gráfica que no tiene subgráficas homeomórficas a K_5 ó $K_{3,3}$.*

Teorema 2. *Si una gráfica plana conexa tiene p vértices y q aristas, con $p \geq 3$, entonces $q \leq 3p - 6$.*

Decimos que una gráfica G es *crítica* si y sólo si para cualquier subgráfica H de G, $\chi(H) < \chi(G)$. Así, una gráfica G es k-*crítica* si G es k-cromática y crítica.

1. Considera la gráfica bipartita completa $K_{m,n}$. En una sistema coordenado cartesiano, escoge $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ puntos en el eje x positivo, $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ puntos en el eje x negativo y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ puntos en el eje y positivo, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos en el eje y negativo. La figura formada de unir todos los pares con algún punto en el eje x y algún punto en el eje x es una representación de $K_{m,n}$. Usa esta representación para probar que
$$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

2. Prueba que la gráfica de Petersen no es plana usando el Teorema 1.

3. Dibuja K_6 con tres cruces.

4. ¿Cuánto vale $\nu(K_{3,4})$?

5. Supón que G es una gráfica con p vértices y q aristas y supón que $\delta(G) \geq 6$. Prueba que
$$q \geq 3p.$$
De aquí que todo gráfica plana contiene al menos un vértice de grado cinco. (*Sugerencia.* Utiliza el Teorema 2.)

6. Prueba que toda gráfica posee una subgráfica k-crítica.

7. Prueba que para toda gráfica G, si es k-crítica entonces $\delta(G) \geq k-1$. (*Sugerencia.* Por contradicción.)

8. Prueba usando lo que hay en esta tarea que toda gráfica plana es 6-coloreable

9. Prueba que si cualesquiera dos ciclos de longitud impar tienen un vértice en común en G entonces G puede colorearse con a lo más cinco colores.

10. Si G es una gráfica con exactamente un ciclo de longitud impar entonces $\chi(G) = 3$.

11. Si P es la gráfica de Petersen, ¿cuánto vale $\chi(P)$? ¡Argumenta porque no vale menos!

12. Prueba que
$$|V(G)| \leq \beta(G) \cdot \chi(G).$$

13. Si x es un vértice de G de grado menor que n, muestra que G es n-coloreable si y sólo si $G - x$ lo es.

Extra. Prueba que las únicas gráficas 3-críticas son los ciclos de longitud impar.