Teoría de las Gráficas

Sétima tarea
21 de mayo de 2009

Lemma 1. *Si v_1, v_2, $\ldots$, v_n son n vértices distintos de una gráfica G n-conexa entonces la gráfica H construida a partir de G al añadir un vértice de grado n que es adyacente a cada uno de los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es n-conexa.*

Teorema 1 (Teorema de Menger)**.** *Si u y v son vértices no adyacentes en una gráfica G entonces el mínimo número de vértices que separan u y v es igual al máximo número de (u, v)-trayectorias internamente ajenas en G.*

Teorema 2 (Teorema de Whitney)**.** *Una gráfica no trivial G es n-conexa si y sólo si pra cada par u, v de vértices distintos existen al menos n (u, v)-trayectorias internamente ajenas en G.*

1. Prueba que si B_1 y B_2 son bloques tales que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ entonces $|B_1 \cap B_2| = 1$ y la intersección es un punto de corte.

2. Si G es conexa, prueba que la gráfica de bloques-vértices de corte es un árbol.

3. Define la *conexidad lineal local* para vértices u y v, $\lambda_G(u, v)$, y demuestra que:

   (a) $\lambda_G(u, v) \leq 1$ implica que $\kappa_G(u, v) \leq 1$ siempre que u y v no sean adyacentes;

   (b) $\lambda_G(u, v) \leq \min\{d_G(u), d_G(v)\}$ y

   (c) si u no es adyacente a v entonces $\kappa_G(u, v) \leq \lambda_G(u, v)$.

4. Usa el Teorema de Menger para probar que $\kappa(G) = \lambda(G)$ cuando G es 3-regular.

5. Prueba que si $e \in A(G)$ entonces $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - e)$.

6. Prueba que si $e \in A(G)$ entonces $\kappa_{G-e}(a, b) \geq \kappa(G) - 1$.

7. Usa el ejercicio previo para probar el Teorema de Whitney.

8. Prueba que una gráfica G de orden $p \geq 2n$ es n-conexa si y sólo si para cualesquiera dos conjuntos ajenos V_1 y V_2 de n vértices cada uno, existen n trayectorias ajenas que conectan V_1 y V_2.

Extra. Prueba que una gráfica G de orden $p \geq n + 1 \geq 3$ es n-conexa si y sólo si para cada conjunto S de n vértices distintos de G y para cada subconjunto T de S de dos vértices, existe un ciclo de G que contiene los vértices de T pero no los vértices $S \setminus T$.