

Hacia las gráficas: una introducción básica*

Ilán A. Goldfeder

Versión 0.0.21

1 Gráficas

Definición 1. Una *gráfica* G es un **par ordenado** $(V(G), A(G))$ donde, para el presente texto, $V(G)$ es un conjunto arbitrario y no-vacío, los *vértices* de G , y $A(G)$ es un conjunto de **pares no ordenados** de vértices, las *aristas* de G .

Dada una gráfica G , la cardinalidad de $V(G)$ es el *orden* de G y la cardinalidad de $A(G)$ es el *tamaño* de G . Ya que el conjunto de los vértices no será vacío para el presente texto, el orden de cualquier gráfica es de al menos uno.

Dada una gráfica G y dos vértices u y v en G , si $\{u, v\}$ está en $A(G)$ diremos que u y v son vértices *adyacentes*, que u y v son los *extremos* de la arista $\{u, v\}$, que la arista $\{u, v\}$ *une* a u con v y que tanto u como v *inciden* en la arista $\{u, v\}$.

Obsérvese que bajo nuestra definición de gráfica, entre cualesquiera dos vértices hay a lo más una arista (es decir, no admitiremos arista múltiples) y ningún vértice es adyacente a sí mismo (es decir, no admitiremos lazos).

La siguiente es una convención sobre la notación de las aristas. Ya que resulta bastante tedioso escribir $\{u, v\}$ cada vez que hablemos de la arista que une a u con v , usualmente escribiremos uv o vu para denotar a tal arista.

*Derechos de autor © 2014 por Ilán A. Goldfeder. Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

Ya que nuestras aristas son parejas no ordenadas, uv y vu representarán a la misma arista.

2 Subgráficas

Intuitivamente, una subgráfica es una gráfica que «vive» dentro de otra gráfica. Así, tenemos la siguiente definición preliminar.

Definición 2 (Definición preliminar). Dada una gráfica G , diremos que H es *subgráfica* de G si H en sí es gráfica y se tiene que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. A veces lo denotamos como $H \leq G$.

Claramente, toda gráfica G es subgráfica de sí misma. Si H es subgráfica de G pero H no es igual a G , decimos que H es una subgráfica *propia* de G .

Adicionalmente, tenemos tres clases especiales de subgráficas que es necesario mencionar.

Definición 3 (Subgráfica inducida por vértices). Dada una gráfica G y S un subconjunto de los vértices de G , la *subgráfica inducida por S en G* , denotada como $G[S]$ o $\langle S \rangle_G$, tiene por conjunto de vértices a S y dos vértices en $G[S]$ son adyacentes si y sólo si son adyacentes en G .

Si H es subgráfica de G , decimos que H es *inducida* si $H = G[V(H)]$.

En cierto sentido, una subgráfica inducida es la parte de G que más se parece a G con esos vértices.

2.1 Gráficas vacías y gráficas completas

Una gráfica G se dice que es *vacía* si no posee aristas, es decir, $A(G) = \emptyset$. Esto significa que para cualesquiera dos vértices u y v en $V(G)$, tenemos que uv **nunca está** en $A(G)$. Por el contrario, una gráfica se dice que es *completa* si cualquier par de sus vértices es adyacentes, es decir, para cualesquiera dos vértices u y v en $V(G)$, tenemos que la arista uv está en $A(G)$. Esto es, para cualesquiera dos vértices distintos u y v en $V(G)$, tenemos que uv **siempre está** en $A(G)$. Finalmente, notemos que el grado de cualquier vértice en una gráfica vacía es cero. En cambio, si G es una gráfica completa de orden n , el grado de cualquier vértice de G siempre es $n - 1$.

2.1.1 Existencia y unicidad de ciertas gráficas vacías y completas

Para toda gráfica G de orden n , existen dos gráficas de orden n , G' y G'' , tales que G' es vacía, G'' es completa, G' es subgráfica de G y G es subgráfica de G'' .

Para probar lo anterior, hay que mostrar las gráficas G' y G'' que satisfacen las condiciones del enunciado.

Existencia.

Consideremos primero el caso de G' . Ya que G' debe ser subgráfica de G , G' debe satisfacer que $V(G') \subseteq V(G)$ y $A(G') \subseteq A(G)$. Ya que el orden de G y G' debe ser igual, es decir, $|V(G)| = n = |V(G')|$, se sigue que $V(G')$ debe de ser igual a $V(G)$. Ya que G' deberá de ser una gráfica vacía, tendremos que $A(G') = \emptyset$. Finalmente, veamos que G' es efectivamente una subgráfica de G . Primero, G' es una gráfica. Segundo, por construcción, tenemos que $V(G') \subseteq V(G)$. Finalmente, ya que $A(G') = \emptyset$ y el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, tenemos que $A(G') \subseteq A(G)$. Por lo tanto, $G' \leq G$.

Ahora consideremos el caso de G'' . Al seguir un razonamiento idéntico al anterior, llegaremos a que $V(G'')$ debe ser igual a $V(G)$. Ya que G'' debe ser completa, todo par no-ordenado de vértices de G'' debe ser adyacente, es decir, para cualesquiera u y v en $V(G'')$, tendremos que $\{u, v\}$ está en $A(G'')$. Esto es, $A(G'') = \{\{u, v\}: u, v \text{ están en } V(G'')\}$. Ahora, veamos que G'' efectivamente es una gráfica, $V(G'')$ es un conjunto finito y no vacío porque por definición, G era una gráfica, es decir, $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío y $V(G'') = V(G)$. Luego, $A(G'')$ ciertamente es un conjunto de pares no ordenados de elementos de $V(G'')$. Por lo tanto, G'' es una gráfica. Ahora, debemos verificar que G es subgráfica de G'' . Claramente $V(G) \subseteq V(G'')$ por construcción. Basta, pues, con ver que $A(G)$ es subconjunto de $A(G'')$. Recordemos que los elementos de $A(G)$ son pares no ordenados de elementos de $V(G)$. Por otro lado, $A(G'')$ es $\{\{u, v\}: u, v \text{ están en } V(G'')\}$, es decir, todos los pares no ordenados de elementos de $V(G'')$, que, en particular, contiene a los elementos de $V(G)$. Por lo tanto, $A(G) \subseteq A(G'')$.

Pero podemos decir aún más sobre las gráficas anteriores, G' y G'' : ambas son únicas. ¿Qué significa que sean «únicas»? Quiere decir que para cualquiera otra gráfica H' , que sea vacía, de orden n y tal que $H' \leq G$, se sigue que $G' = H'$. ¿Qué significa que G' y H' sean «iguales»? Lo único que puede significar, es decir, una gráfica está definida como un par ordenado de dos conjuntos (sus vértices y sus aristas) y dos pares ordenados son iguales si y sólo si su primera entrada es igual y su segunda entrada es igual. De aquí

que G' es igual a H' si y sólo si $V(G') = V(H')$ y $A(G') = A(H')$.

Unicidad.

Así, tomemos una gráfica G de orden n y supongamos que G' es la gráfica vacía de orden n que es subgráfica de G que arroja la prueba anterior. Probaremos que G' es única. Para esto, supongamos que H' también es una gráfica vacía de orden n tal que H' es subgráfica de G . Debemos mostrar que $G' = H'$ (como pares ordenados de conjuntos), es decir, debemos mostrar que tanto $V(G') = V(H')$ como $A(G') = A(H')$. Una de esas dos condiciones es muy fácil, ya que tanto G' como H' son gráficas vacías, tenemos que $A(G') = \emptyset$ y $A(H') = \emptyset$. Por lo tanto, $A(G') = A(H')$. Para la primera condición, recordemos que, por construcción, tenemos que $V(G') = V(G)$. Ya que H' es subgráfica de G , tenemos que $V(H') \subseteq V(G)$. Pero como ambas gráficas tienen el mismo orden, se sigue que $V(H') = V(G)$. De aquí que, $V(G') = V(H')$. Por lo tanto, $G' = H'$.

Así, podríamos definir dos «funciones», $\mathcal{E}$ y $\mathcal{K}$, de la familia de todas las gráficas a la familia de las gráficas, tales que si G es una gráfica dada de orden n , $\mathcal{E}(G)$ es la (y no «una») subgráfica vacía de orden n de G y G es subgráfica de $\mathcal{K}(G)$, una gráfica completa de orden n . Ya que sabemos que $\mathcal{E}(G)$ y $\mathcal{K}(G)$ siempre existen y son únicas, se sigue que las «funciones» están bien definidas¹. Podemos considerar a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{K}$ como dos operaciones de gráficas².

2.1.2 Algunos resultados sobre las gráficas completas

Haremos uso de un resultado auxiliar que no está de más probar.

Resultado básico 1. *Si A y B son dos conjuntos finitos tales que A es subconjunto de B y la cardinalidad³ de A y B es la misma entonces $A = B$.*

Recordemos que una *implicación* es una proposición del tipo *Si pasa la condición A entonces ocurre B* (lo cual a veces es denotado como $A \Rightarrow B$). Es fácil checar (con una tabla de verdad) que esa proposición es *lógicamente equivalente*⁴ a probar que *si no pasa B entonces no pasa A* (también denotado

¹Que una función $f : A \rightarrow B$ esté *bien definida* significa que para todo elemento a en A , existe $f(a)$, $f(a)$ está en B y $f(a)$ es único.

²Dada una operación, tomamos una, dos o más gráficas y al itaplicarle la operación obtenemos una nueva gráfica (la cual necesariamente será única, pues de otra forma no sería operación)

³La *cardinalidad* de un conjunto, *grosso modo*, es el número de elementos que contiene.

⁴Que dos proposiciones sean *lógicamente equivalentes* significa que una es verdadera si y sólo si la otra también es verdadera.

como $\neg B \Rightarrow \neg A$. Cuando a uno le piden probar que demuestre que *si A entonces B* pero uno en cambio muestra que *si no pasa B entonces no pasa A* , se dice que uno procede por *contrapositiva*.

Demostración. Procedamos por contrapositiva, es decir, supongamos que A no es igual a B y probemos que no pasa que A es subconjunto de B y sus cardinalidades son iguales, es decir, debemos mostrar que A no es subconjunto de B o que sus cardinalidades no son iguales.

La contención de conjuntos ($\subseteq$) relaciona dos conjuntos entre sí. Si P y Q son dos conjuntos, sólo puede darse una de dos: o bien $P \subseteq Q$ o bien $P \not\subseteq Q$. Y eso siempre pasa para cualquier par de conjuntos.

Dicho lo anterior, tenemos dos posibilidades: $A \not\subseteq B$ o $A \subseteq B$. Si pasa que $A \not\subseteq B$ ya terminamos, pues nos pedían probar que A no es subconjunto de B o que sus cardinalidades no son iguales. Para terminar, tenemos que analizar la otra posibilidad, es decir, que A sí sea subconjunto de B . Como no son iguales, debe existir un elemento b en B que no esté en A (es decir, b está en su diferencia $B \setminus A$). Así, tendríamos que A es subconjunto de $B \setminus \{b\}$ que es subconjunto de B , *i.e.*,

$$A \subseteq B \setminus \{b\} \subseteq B.$$

Si tomamos las cardinalidades de los conjuntos, tendríamos que:

$$|A| \leq |B \setminus \{b\}| \leq |B|,$$

pero como $B \setminus \{b\}$ y $\{b\}$ son ajenos,

$$|A| \leq |B| - 1 \leq |B|,$$

es decir,

$$|A| < |B|.$$

Por lo tanto, las cardinalidades de A y B son diferentes, que es lo que queríamos probar. $\square$

Proposición 4. *Consideremos una gráfica completa G . Si S es un subconjunto no-vacío de $V(G)$ entonces $G[S]$, la subgráfica inducida por S en G , es completa.*

Demostración. Ya que G es completa, **por definición** tenemos que para cualquier par de vértices distintos u y v en $V(G)$, uv está en $A(G)$. Debemos probar que si x y y son dos vértices distintos de S (que es el conjunto de los vértices de la gráfica $G[S]$) entonces xy es una arista en $A(G)$. **Por la definición** de subgráfica inducida, tenemos que dos vértices de $G[S]$ son adyacentes en $G[S]$ si y sólo si lo son en G . Ya que tanto x como y son también vértices de G y como G es completa, tenemos que xy son adyacentes en G . Por lo tanto, son adyacentes en $G[S]$. Por lo tanto, $G[S]$ es una gráfica completa. $\square$

Proposición 5. *El tamaño de una gráfica completa G de orden n es $n(n-1)/2$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre el orden de G .

Paso base. Si el orden de G es uno entonces $|V(G)|$ es uno y $A(G) = \emptyset$. Tendríamos que

$$\frac{(1)((1) - 1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

y claramente $|A(G)| = 0$.

Hipótesis inductiva. Supongamos que toda gráfica completa G de orden n satisface que

$$|A(G)| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Paso inductivo. Consideremos H una gráfica completa de orden $n+1$ y tomemos un vértice v en H . Definamos H' como la subgráfica de H inducida por $V(H) \setminus \{v\}$, es decir, $H' = H[V(H) \setminus \{v\}]$. Tenemos que

$$|V(H')| = |V(H) \setminus \{v\}| = |V(H)| - 1 = (n+1) - 1 = n.$$

Además, como H es completa, por la proposición 4 se sigue que H' también es completa. Por lo tanto, H' satisface la *hipótesis inductiva*, es decir, el tamaño de H' es exactamente $n(n-1)/2$. Ahora consideremos el conjunto de todas las aristas de H que tienen como extremo a v , es decir, $B = \{xv: x \in V(H) \setminus \{v\}\}$. Claramente B es un subconjunto de $A(H)$. Más aún, mostraremos que toda arista a en $A(H)$, a está en o en $A(H')$ o en B (pero nunca en ambos). Para ello, tomemos una arista a en $A(H)$. Si ninguno de los extremos de a es v entonces los extremos de a están en los vértices de H' (que son $V(H) \setminus \{v\}$). Por lo tanto, a está en $A(H')$. Por otro lado si alguno de los extremos de a es v entonces a está en B . Ya que ambas condiciones son mutuamente

excluyentes (es decir, uno de los extremos de a es v o ninguno de los extremos de a es v), se sigue que $A(H) = A(H') \cup B$, $A(H') \cap B = \emptyset$ y ni $A(H')$ ni B son el conjunto vacío. Así, tenemos

$$|A(H)| = |A(H') \cup B| = |A(H')| + |B|.$$

¿Cuántas aristas hay en B ? Es decir, ¿cuántos vecinos tiene v en H ? Ya que H es una gráfica completa, v será adyacente al resto de los vértices de H , es decir, habrán $n - 1$ aristas en B . Por otro lado, por la hipótesis inductiva sabemos que la cardinalidad de $A(H')$ es $n(n - 1)/2$. Así, tenemos que la cardinalidad de $A(H)$ es

$$|A(H)| = \frac{n(n - 1)}{2} + n - 1 = \frac{n(n - 1) + 2(n - 1)}{2} = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}.$$

Con lo cual, hemos mostrado al paso inductivo. Por lo tanto, el tamaño de cualquier gráfica de orden n es justamente $n(n - 1)/2$. $\square$

Ahora, probemos el recíproco:

Proposición 6. *Consideremos una gráfica G de orden n . Si el tamaño de G es $n(n - 1)/2$ entonces G es una gráfica completa.*

Demostración. En § 2.1.1 probamos que existe una gráfica completa G'' de orden n tal que G es subgráfica de G'' . Por la proposición ?? sabemos que el tamaño de G'' es $n(n - 1)/2$. Como G es subgráfica, también sabemos que $A(G)$ es un subconjunto de $A(G'')$. Así, por el resultado básico 1 tenemos que $A(G)$ y $A(G'')$ son iguales.

Ya que ambas gráficas tienen el mismo orden y $V(G)$ es subconjunto de $V(G'')$ (por ser G subgráfica de G''), tenemos que $V(G)$ es igual a $V(G'')$.

Por lo tanto, G y G'' son iguales. De aquí que G es una gráfica completa. $\square$

Podemos resumir los dos resultados anteriores en la siguiente proposición:

Proposición 7. *Dada una gráfica G de orden n , G es completa si y sólo si el tamaño de G es $n(n - 1)/2$.*

3 Primer teorema de gráficas

Recordemos que cada arista tiene dos extremos, es decir, en cierto sentido cada arista «afecta» a dos vértices. ¿Cómo los «afecta»? Pues aporta una unidad en su grado. Si un vértice u tiene grado p , significa que le llegan p aristas pero cada una de esas aristas afecta a otro vértice. Es decir, p otros vértices (distintos de u) son afectados por las aristas que le llegan a u . En resumen, cada arista aparece como una unidad en el grado de dos vértices distintos. Así, podríamos esperar lo siguiente.

Teorema 1. *Considérese una gráfica G de orden n y tamaño m con $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Tenemos que:*

$$d_G(v_1) + d_G(v_2) + \dots + d_G(v_n) = 2m.$$

Algunas veces la suma $d_G(v_1) + d_G(v_2) + \dots + d_G(v_n)$ aparece denotada como $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$.

Demostración. Consideremos una gráfica G de orden n con $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Hay dos casos en los que fácilmente podemos probar el resultado: si G es vacía o es completa.

Primero supongamos que G es vacía. Así, todo vértice tiene grado cero. Por lo tanto, la suma $d_G(v_1) + d_G(v_2) + \dots + d_G(v_n)$. Ahora, supongamos que G es completa, así tenemos el grado de cada vértice es $n - 1$ (ver § 2.1) y su tamaño es $n(n - 1)/2$ por ???. La suma $d_G(v_1) + d_G(v_2) + \dots + d_G(v_n)$ sería igual a $n(n - 1)$ es que es igual a $2(n(n - 1)/2)$.

Para la prueba, podemos proceder por inducción sobre el número de aristas de la gráfica, llamémoslo m .

Para el caso base tendríamos que $m = 0$, por lo que G es una gráfica vacía y ya probamos que efectivamente se satisface la proposición.

Supongamos que para toda gráfica G' con m' aristas, donde m' es menor que m , se satisface que:

$$d_{G'}(v_1) + d_{G'}(v_2) + \dots + d_{G'}(v_n) = 2m',$$

donde G' tiene orden n y $V(G') = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y probémoslo para una gráfica G de tamaño m , con m mayor que uno. Ya que m es mayor que uno, sabemos que existen dos índices diferentes i y j en $\{1, 2, \dots, n\}$ tales que v_i y v_j son adyacentes. Así, definamos la gráfica G' cuyo conjunto de vértices sea $V(G)$ y cuyo conjunto de aristas sea $A(G) \setminus \{v_i v_j\}$. Claramente el tamaño

de G' es menor que el tamaño de G , por lo que satisface nuestra hipótesis inductiva. Así, sabemos que

$$d_{G'}(v_1) + d_{G'}(v_2) + \cdots + d_{G'}(v_n) = 2m'.$$

Notemos que los únicos vértices cuyo grado cambia en G' son v_i y v_j . Así, tenemos que

$$d_{G'}(v_k) = d_G(v_k)$$

si k está en $\{1, 2, \dots, n\}$ pero es diferente de i y de j . Para el caso de v_i y v_j , en G' incide una arista menos en ellos que en G , por lo tanto tenemos que

$$d_{G'}(v_i) = d_G(v_i) - 1 \text{ y } d_{G'}(v_j) = d_G(v_j) - 1.$$

Al sustituir tenemos que:

$$\begin{aligned} 2m' &= d_{G'}(v_1) + \cdots + d_{G'}(v_i) + \cdots + d_{G'}(v_j) + \cdots + d_{G'}(v_n) \\ &= d_G(v_1) + \cdots + d_G(v_i) - 1 + \cdots + d_G(v_j) - 1 + \cdots + d_G(v_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_G(v_1) + d_G(v_2) + \cdots + d_G(v_n) - 2 = 2m'$. De aquí que:

$$d_G(v_1) + d_G(v_2) + \cdots + d_G(v_n) = 2m' + 2 = 2(m' + 1) = 2m,$$

que es lo que queríamos. □

Corolario 1. *El número de vértices de grado impar en cualquier gráfica es par.*

4 Isomorfismos

Cuando introducimos un nuevo objeto en matemáticas, es necesario también dar un criterio para saber cuando dos de estos objetos son «iguales», es decir, que para efectos de las propiedades que nos interesan, se comportan igual. Este criterio puede verse como una relación binaria en la clase de todas las gráficas. Esta relación debería comportarse bien, es decir, satisfacer que:

1. para toda gráfica G , G debería ser «igual» a sí misma,
2. para todas las gráficas G y H , si G es «igual» a H entonces H debería ser «igual» a G y

3. para cualesquiera tres gráficas G , H y F , si G es «igual» a H y H es «igual» a F entonces G debería ser «igual» a F .

Una posibilidad sería decir que dos gráficas son «iguales» si sus dibujos son iguales, pero tal definición no satisfaría el primer inciso si consideramos los dibujos siguientes para el caso de la gráfica K_4 con vértices $\{a, b, c, d\}$ y aristas $\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$.

¿Qué es lo importante de una gráfica, qué nos interesa preservar? Recordemos que son dos los elementos que forman a las gráficas: sus vértices y sus aristas. Más aún, nos importa saber cuando dos vértices dados son o no adyacentes. Empecemos con los vértices. Pensemos en K_1 , las gráficas que tienen un único vértice, ¿hace alguna diferencia que le demos un nombre diferente a ese vértice con relación a las adyacencias? Pues no, podríamos pensar que esencialmente todas son iguales. Ahora pensemos en $\overline{K}_n$, las gráficas con n vértices y sin aristas. En términos de sus adyacencias, podemos pensar que todas las $\overline{K}_n$ son esencialmente iguales. Sin embargo, si G y H son dos gráficas de orden n sin aristas, no necesariamente $V(G)$ y $V(H)$ son iguales. ¿En qué sentido *sí lo son*? Sin duda, existe una función biyectiva entre ambos conjuntos, $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$. Ya que no hay aristas, no tenemos que pedir ninguna condición al respecto. Digamos para empezar que dos gráficas sin aristas son iguales si y sólo si existe una función biyectiva entre sus vértices.

Pensemos en dos gráficas sin aristas, llamémoslas G y H . Si tienen el mismo orden, es claro que existe una función biyectiva $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$. Por el contrario, si no sabemos sus órdenes pero sabemos que existe una función biyectiva entre sus vértices, $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$, entonces sus órdenes son iguales.

Ahora supongamos que el conjunto de las aristas de nuestras gráficas no es vacío. Recordemos que para toda gráfica G de orden n , existe la gráfica vacía $\mathcal{E}(G)$ de orden n tal que $\mathcal{E}(G)$ es subgráfica de G y es única. Si G y H fuesen dos gráficas isomorfas y los isomorfismo preservan las propiedades «importantes» de las gráficas, lo natural sería esperar que $\mathcal{E}(G)$ y $\mathcal{E}(H)$ también sean gráficas isomorfas. Como tanto $\mathcal{E}(G)$ como $\mathcal{E}(H)$ son gráficas vacías, ya tenemos una noción de isorfismo: son isomorfas si y sólo si existe una función biyectiva entre sus vértices. Así, podríamos esperar que entre G y H pase lo mismo, es decir, que si son isomorfas entonces existe una función biyectiva entre $V(G)$ y $V(H)$. Sin embargo, no tiene porqué ser igual a la función biyectiva que existe entre los vértices de $\mathcal{E}(G)$ y $\mathcal{E}(H)$.

Ahora, pensemos en la gráfica K_4 con $V(K_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $A(K_4) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_2u_3, u_2u_4, u_3u_4\}$. En la imagen que sigue aparecen dos

dibujos de K_4 que ciertamente no son iguales, pero que si queremos que nuestra definición de «igualdad» sea una relación de equivalencia, deberían de ser iguales bajo nuestra definición.

(Más texto)

Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 8. Dos gráficas G y H se dice que son *isomorfas* (y se denota por $G \cong H$) si existe una función biyectiva $\phi: V(G) \rightarrow V(H)$ que satisface que para cualquier par de vértices u y v en G , la arista uv está en G si y sólo si la arista $\phi(u)\phi(v)$ está en H

La relación de ser isomorfas satisface que es:

1. reflexiva, $G \cong G$ para cualquier gráfica G ,
2. simétrica, $G \cong H$ implica que $H \cong G$ para cualquier par de gráficas G y H y es
3. transitiva, si $G \cong H$ y $H \cong F$ entonces $G \cong F$, para cualquier terna de gráficas G , H y F .

De aquí tendremos que:

Proposición 9. Si G y H son dos gráficas isomorfas entonces:

1. tienen el mismo orden,
2. tienen el mismo tamaño y
3. vértices correspondientes tienen el mismo grado.

5 Recorridos

5.1 Recordatorio: Sucesiones

Recordemos que una *sucesión (finita)*⁵ es una lista ordenada de elementos $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, donde k es un número entero positivo y $a_1, a_2, \dots, a_k$ son elementos de un conjunto dado S . La propiedad que más nos interesa de la sucesiones es que tienen un **orden**, es decir, sabemos quien es el primer elemento, el segundo y así sucesivamente.

Los pares o parejas ordenadas son un ejemplo de una sucesión que consta sólo de dos elementos. Dos pares ordenados, digamos (a, b) y (c, d) , son iguales si y sólo si **son iguales entrada a entrada**. Es decir, $(a, b) = (c,$

⁵También existen sucesiones infinitas pero, en lo que sigue, sólo usaremos sucesiones finitas.

d) si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Otra forma de verlo sería decir que dos pares ordenados son diferentes si y sólo si difieren en al menos una entrada.

Lo anterior se extiende a sucesiones de cualquier tamaño pero ¿qué es el «tamaño» de una sucesión? La *longitud de una sucesión* $C = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ es el número de entradas o lugares que tiene. En el caso de la sucesión C , tiene longitud p . Obsérvese que lo importante es el número de lugares (y su orden) y no quiénes ocupen esos lugares; la sucesión (a, a, a, a) tiene longitud cuatro pero en ella aparece un solo elemento.

Dos sucesiones $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_q)$ son *iguales* si y sólo si son iguales entrada a entrada, es decir, si para todo número entero i en $\{1, 2, \dots, \max(p, q)\}$ se tiene que $a_i = b_i$. Si las sucesiones tienen longitudes diferentes entonces necesariamente en las últimas entradas van a ser diferentes, por lo que no pueden ser iguales.

Por lo anterior, para que dos sucesiones sean iguales **es necesario** que tengan la misma longitud. Pero **no es suficiente** que tengan la misma longitud; por ejemplo, si a y b son elementos distintos en S , las sucesiones (a) y (b) tienen la misma longitud pero son diferentes.

5.2 Caminos en gráficas

Consideremos la siguiente gráfica:

Podríamos pensar cada vértice como una ‘posición’ o un ‘lugar’ y si entre dos vértices hay una arista, significa que podemos ‘pasar’ de la posición representada por uno de esos vértices a la posición representada por el otro vértice. Con esas reglas podemos dar ‘recorridos’ dentro de esa gráfica. Los recorridos son listas y por lo tanto tienen un **orden**. Así, la forma en como expresamos esos recorridos en las gráficas es por medio de sucesiones.

Por lo tanto, en $G = (V(G), A(G))$ tenemos sucesiones $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ donde:

1. a_i es un vértice, es decir, a_i está en $V(G)$ para todo i en $\{1, 2, \dots, p\}$ y
2. entre cualesquiera dos elementos consecutivos hay una arista, es decir, para todo i en $\{1, 2, \dots, p-1\}$, los vértices a_i y a_{i+1} son **adyacentes** en G .

A cualquier sucesión en una gráfica que cumpla esas dos condiciones se le llama un *camino* en la gráfica G . Así tenemos la definición siguiente:

Definición 10. Dada una gráfica $G = (V(G), A(G))$, una sucesión $C = (a_1, a_2, \dots, v_p)$ es un *camino* de G si a_i es un vértice de G para todo i en $\{1, 2, \dots, p\}$ y a_i es adyacente a a_{i+1} para todo i en $\{1, 2, \dots, p-1\}$.

También decimos que C es un (v_1, v_p) -camino. Si v_1 es diferente de v_p decimos que C es un camino *abierto*. En otro caso (es decir, si $v_1 = v_p$) decimos que C es un camino *cerrado*.

El ejemplo más sencillo de un camino son los llamados caminos *triviales*, si v es un vértice en una gráfica G entonces (v) es un camino en G (podríamos decir que es el camino ‘no te muevas’).

Todo camino es una sucesión **por definición** (que además satisface dos condiciones adicionales). Los caminos también tienen una ‘longitud’ que está relacionada con la longitud de la sucesión [que los define] **pero no son iguales**. En un camino, la longitud que es una medida de qué tanto te mueves en la gráfica. Así, los caminos triviales deberían de tener longitud cero, ya que en ellos no nos movemos (pero como sucesiones tienen longitud uno). Los caminos en los que nos movemos de un vértice a otro; por ejemplo, si G es una gráfica que tiene dos vértices u y v que son adyacentes entonces la sucesión (u, v) es un camino en G en el que te mueves una sola vez, por lo tanto, debería tener longitud uno (pero como sucesión tienen longitud dos).

En general, la *longitud* de un camino en una gráfica G es cuantas veces nos movemos que es la longitud de la sucesión menos uno. Así tenemos que:

Definición 11. Dado un camino $C = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ en una gráfica G (**por definición** de camino se sigue que p es un número entero positivo), la *longitud* de C es $p-1$. La longitud de C se denota por $l(C)$.

**

Recordemos que dos sucesiones son iguales si y sólo si son iguales entrada a entrada o, en la forma contrapositiva, dos sucesiones son iguales si y sólo si difieren en **al menos una entrada**. Puesto que los caminos son sucesiones, lo mismo aplica para los caminos.

Ya que toda gráfica G posee al menos un vértice, digamos v , en toda gráfica existe al menos el camino *trivial* (v) . La segunda condición de la definición de ser camino (que cualesquiera dos vértices consecutivos en la sucesión sean adyacentes) se satisface por vacuidad (es decir, no podemos mostrar un dos vértices consecutivos en la sucesión que no sean adyacentes).

Si una gráfica G posee al menos dos vértices, digamos u y v , y estos son adyacentes, siempre tendremos el camino $(u, v, u, v, \dots)$, que será tan largo

como queramos. De aquí que las únicas gráficas que tendrán un número **finito** de caminos son las gráficas vacías.

Si C es un camino en una gráfica G que no repite aristas se dice que C es un *paseo*. Si, más aún, C no repite vértices se dice que es una *trayectoria*. Si bien toda trayectoria y todo paseo es un camino, también podemos mostrar que toda trayectoria es también un paseo.

Los mismos conceptos que se aplican a los caminos (como ser abierto, cerrado, su longitud, etc) se aplican también a los paseos y las trayectorias (porque también son caminos).

Notemos que las únicas trayectorias cerradas son los caminos triviales. Por lo que nos falta por definir un análogo más adecuado a las trayectorias cerradas. Un camino cerrado de longitud al menos tres se dice que es un *ciclo* si sus vértices no se repiten excepto por el primero y el último que deben de ser iguales.

El número de paseos y trayectorias en una gráfica siempre será finito⁶.

Dado un camino $C = (v_0, v_1, \dots, v_p)$ en una gráfica dada G , un *subcamino* C' de C es una subsucesión⁷ $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_s})$ de C que además es un camino y todas las aristas que recorre C' también las recorre C .

Dado un camino $C = (v_0, v_1, \dots, v_p)$ en una gráfica dada G , si escogemos dos vértices v_i y v_j en C con $i \leq j$, el subcamino $C[v_i, v_j]$ de C es la subsucesión $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$. Si $C_1 = (v_0, v_1, \dots, v_p)$ y $C_2 = (u_0, u_1, \dots, u_s)$ son dos caminos en G tales que $v_p = u_0$ entonces la *concatenación* o *unión* de C_1 y C_2 , denotada por $C_1 \cup C_2$, es la trayectoria $(v_1, v_2, \dots, v_{p-1}, v_p = u_0, u_1, \dots, u_s)$. Notemos que si v_i es cualquier vértice en C , ya que $C = C[v_0, v_i] \cup C[v_i, v_p]$ tenemos que $l(C) = l(C[v_0, v_i]) + l(C[v_i, v_p])$.

Proposición 12. *Dada una gráfica G y dos vértices distintos u y v en G , si C es un (u, v) -camino entonces existe una subsucesión C' de C que es una (u, v) -trayectoria.*

Demostración. Consideremos que $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_p = v)$ y hagamos la prueba por inducción sobre la longitud de C . Ya que la longitud del camino

⁶Ya sabemos que el tamaño de una gráfica es finito porque está acotado por arriba por $n(n-1)/2$. Ya que los paseos ni las trayectorias repiten aristas, a lo más pueden tener longitud el tamaño de la gráfica

⁷Recordemos que una *sucesión* es una lista de objetos, en este caso, de vértices en la que lo importante es que tiene un **orden**, es decir, sabemos cuál es el primer elemento, cuál es el segundo y así. Dada una sucesión, una *subsucesión* de ella se obtiene de la sucesión eliminando alguno de sus términos pero sin alterar su orden.

abierto (pues u y v son distintos) más pequeño posible es uno, empezaremos considerando que C_1 tiene longitud uno. Así, tenemos que $C_1 = (u = x_0, x_1 = v)$. Ya que supusimos que u y v eran distintos, se sigue que todos los vértices de C_1 son distintos y, por lo tanto, es en sí mismo una (u, v) -trayectoria y a la vez es subsucesión de sí mismo, con lo cual hemos probado el caso base.

Ahora enunciemos nuestra hipótesis de inducción, a saber: dado un entero p mayor que uno, todo (u, v) -camino de longitud menor que p posee una subsucesión que es una (u, v) -trayectoria.

Supongamos, pues, que $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_p = v)$ es un (u, v) -camino de longitud p y probemos que posee una subsucesión que es una (u, v) -trayectoria. Si en C ningún vértice se repite entonces C mismo es una subsucesión de sí mismo y es a la vez una (u, v) -trayectoria.

Así pues, podemos suponer que C pasa dos veces por al menos un vértice, es decir, hay un vértice de G que aparece, al menos, dos veces en C , es decir, hay un vértice repetido en C . Supongamos que para i y j en $\{0, 1, \dots, p\}$ con $i < j$ tenemos que $v_i = v_j$. Debemos mostrar que $C' = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_p)$ es una subsucesión de C y que es C' es un (u, v) -camino de longitud menor que C . Para obtener C' , eliminamos los vértices $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}$ de la sucesión y no modificamos el orden, por lo que efectivamente es una subsucesión de C . Para cualquier índice x en $\{0, 1, \dots, i-1\}$, sabemos que v_x es adyacente a v_{x+1} en G porque C era un camino y también tenemos que para cualquier índice y en $\{j, j+1, \dots, p-1\}$, v_y es adyacente a v_{y+1} en G porque C era un camino. Por lo tanto, C' también satisface lo mismo, esto es, C' es un camino. Ahora, debemos mostrar que C' es un (u, v) -camino, es decir, que empieza en u y termina en v . Por cómo tomamos i y j , tenemos que $0 \leq i$ y $j \leq p$ y quitamos los vértices $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}$, por lo tanto, tanto v_0 como v_p están en C' . ¿Cuál es la longitud de C' ? $C = C[v_0, v_i] \cup C[v_i, v_j] \cup C[v_j, v_p]$, de aquí que $l(C) = l(C[v_0, v_i]) + l(C[v_i, v_j]) + l(C[v_j, v_p])$ y $l(C') = l(C[v_0, v_i]) + l(C[v_j, v_p])$ pero como i es diferente de j , $l(C[v_i, v_j])$ es positivo y así $l(C') < l(C)$. Por lo tanto, C' es un (u, v) -camino de longitud menor que C . Así, C' posee una subsucesión que es una (u, v) -trayectoria. Pero toda subsucesión de C' es una subsucesión de C . Por lo tanto, C posee una subsucesión que es una (u, v) -trayectoria, que es lo que se quería probar. $\square$

6 Conexidad

Definición 13. Una gráfica G se dice que es *conexa* si para cualquier par de vértices u y v de G , existe un (u, v) -camino.

Notemos que la definición anterior es equivalente a pedir que entre cualquier par de vértices u y v exista una (u, v) -trayectoria.

No toda gráfica es conexa.

Definición 14. Las *componentes* de una gráfica son sus subgráficas conexas máximas (con la propiedad de ser conexas).

Lo anterior es equivalente a decir que si G' es una componente de G entonces para toda subgráfica H de G , si G' es subgráfica **propia** de H entonces H no es conexa. También, si G' es una componente de G entonces para toda subgráfica conexa H de G , si G' es subgráfica de H entonces G' es igual a H .

El número de componentes conexas de una gráfica dada G se denota por ω u $\omega(G)$. Notemos que $1 \leq \omega(G) \leq n$, donde n es el orden de G . Claramente, $\omega(G) = 1$ si y sólo si G es conexa y $\omega(G) > 1$ si y sólo si G no es conexa.

Podemos definir la relación *estar conectados* sobre los vértices de una gráfica dada G , a saber, dados dos vértices u y v de G , diremos que u y v *están conectados*, y lo denotaremos $u \sim v$, si existe un (u, v) -camino en G . Tenemos que:

Proposición 15. La relación de «estar conectados» es de equivalencia.

Así, podemos considerar la partición de $V(G)$ inducida por la relación, es decir, $V(G)/\sim = \{V_1, V_2, \dots, V_\omega\}$. No resulta muy difícil ver que las subgráficas $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ son las componentes de G .

Proposición 16. Si $V_i \in V(G)/\sim$ entonces $G[V_i]$ es una componente de G .

Demostración. Tenemos que probar que $G[V_i]$ es conexa y para cualquier subgráfica conexa H de G , si $G[V_i]$ es subgráfica de H entonces $G[V_i] = H$. Sabemos, por definición, que $V_i \subseteq V(H)$. Nos gustaría probar que $V(H) \subseteq V_i$, así pues tomemos un vértice x en H . Como auxiliar (para poder usar la noción de estar conectados) debemos tomar un vértice y en V_i (es irrelevante si y está o no en H). Ya que H es conexa (que es la hipótesis importante), tenemos que existe un (x, y) -camino en H y por lo tanto en G . Así, tenemos

que $x \sim y$. Ya que V_i era una clase de equivalencia de la relación «estar conectados», se sigue que x está en V_i . Por lo tanto $V_i = V(H)$. Falta por mostrar que $A(G[V_i]) = A(H)$ pero es fácil. Tomemos una arista e en $A(H)$, notemos que los dos extremos de e están en V_i por lo anterior. Ya que H es subgráfica de G , e es una arista de G . Pero como los dos extremos de e están en V_i y $G[V_i]$ es la subgráfica de G inducida por V_i , por definición tenemos que e es una arista de $G[V_i]$. Por lo tanto, $G[V_i] = H$. $\square$