Cálculo Diferencial e **Integral** II

Ilán Abraham Goldfeder Ortiz
Alejandro Avilés Cervantes

Primera tarea (primera parte)

Recuerda argumentar todas tus respuestas.

1. Demuestra que
$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$
para cualquier racional $k \neq -1$ (nota que si $k = -1$ la fórmula no tiene sentido) con $0 < a < b$.

   Sugerencia.

   (a) Argumenta por qué x^k es integrable.

   (b) Considera
   $$k = \frac{u}{v},$$
   con u un entero positivo y v un entero positivo o negativo.

   (c) Considera particiones $P = \{a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b\}$ con puntos en *progresión geométrica*. Para ésto toma $\sqrt[n]{b/a} = q$, así $b/a = q^n$. Define $x_0 = a$, $x_1 = aq$, $x_2 = aq^2$, $\ldots$, $x_n = aq^n = b$.

   (d) Considera como puntos intermedios $\xi_i = x_{i-1}$, así $\Xi = \{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\}$. ¿Quiénes son los $f(\xi_i)$? ¿Cuánto es $x_j - x_{j-1}$?

   (e) Prueba que:
   $$S(f, P, \Xi) = a^{k+1}(q-1)[1 + q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \ldots + q^{(n-1)(k+1)}].$$

   (f) Recuerda que:
   $$1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1} = \frac{t^n - 1}{t - 1}$$
   Muestra que:
   $$S(f, P, \Xi)(q-1)\left(\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{q^{k+1} - 1}\right) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{N}$$
   donde
   $$N = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

(g) ¿Qué pasa cuando n tiene a infinito? Muestra que $\sqrt[n]{b/a} = q$ tiende a 1. Pero entonces tanto el numerador como el denominador de N tienden a cero. Supón primero que k es un entero positivo entonces puede llevarse a cabo la divisón entre $q-1$, muestra que queda $N = q^k + q^{k-1} + \ldots + q + 1$. Cuando n crece, q tiende a 1 y, por lo tanto, q^2, q^3, $\ldots$, q^k tenderán tmabién a uno, así que N tiende a $k+1$. Esto muestra que $S(f, P, \Xi)$ tiende a

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

como se quería demostrar.

(h) Ahora muéstralo para cualquier racional $k \neq -1$. Muéstralo para enteros negativos, siguiendo el inciso anterior. Así, si $k = u/v$, considera $q^{1/v} = s$ y

$$N = \frac{s^{(k+1)v} - 1}{s^v - 1} = \frac{\frac{s^{u+v}-1}{s-1}}{\frac{s^v-1}{s-1}}.$$

Si n crece, tanto s como q tienden a uno. Por lo tanto los dos cocientes del lado derecho tienden, respectivamente, a $u+v$ y a v, con lo cual se obtiene $(u+v)/v = k+1$ para el límite de N.

2. Encuentra los valores de las integrales:

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} x dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{+1} x dx \qquad \text{c)} \int_{1}^{2} x^2 dx \qquad \text{d)} \int_{-1}^{-2} x^3 dx \qquad \text{e)} \int_{0}^{n} x dx.$$

3. Encuentra los valores de las integrales:

$$\text{a)} \int_{-1}^{+1} x^3 dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{2} x^3 \cos x dx$$

$$\text{c)} \int_{-1}^{+1} x^4 \cos^2 x \sin^5 x dx \qquad \text{d)} \int_{-1}^{+1} \tan x dx.$$

(*Sugerencia:* Considera las gráficas de las funciones bajo el signo de integral, toma en cuenta su simetría con respecto a $x = 0$ e interpreta las integrales como áreas.)

4. Integra $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ de 0 a b subdiviendo el intervalo en partes iguales y utilizando en las sumas de Riemann los puntos intermedios $\xi_i = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$.

5. Utiliza la fórmula del primer problema y la definición de integral con una partición de subintervalos de la misma longitud para demostrar la relación de límite

$$\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} \to \frac{1}{k+1} \text{ cuando } n \to \infty$$

(*Sugerencia:* Toma $1/n = x_j - x_{j-1}$ y muestra que el límite es igual a $\int_0^1 x^k dx$.)

6. Demuestra que cuando $n \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n}} + \frac{1}{\sqrt{2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) \to 2(\sqrt{2}-1)$$

(*Sugerencia:* Escribe la suma de manera que su límite aparezca como una integral.)

7. Calcula el área de un segmento parabólico limitado por un arco P_1P_2 y la cuerda P_1P_2 de una parábola $y = ax^2$ en término de las coordenadas x_1 y x_2 de ambos puntos.