Cálculo Diferencial e Integral II

Ilán Abraham Goldfeder Ortiz
Alejandro Avilés Cervantes

Primera tarea (segunda parte)

Recuerda argumentar todas tus respuestas.

1. Considera $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Haz una gráfica aproximada de f .
 - Demuestra que f es integrable **usando la definición de integrabilidad o alguno de sus equivalentes**.
2. En cada inciso da los ejemplos que se te piden con $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ambas acotadas. Si crees que no existen, argumenta por qué.
- f integrable, g integrable y $g \circ f$ integrable.
 - f integrable, g integrable y $g \circ f$ **no** integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y $g \circ f$ integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y $g \circ f$ **no** integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y $f + g$ integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y $f + g$ **no** integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y fg integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y fg **no** integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y $f - g$ integrable.
 - f integrable, g **no** integrable y $f - g$ **no** integrable.

3. Demuestra que:

$$0 < \int_0^\pi \sin x \, dx < \pi.$$

4. ¿Existe una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga que:

$$f(x) > 0 \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

y para cualquier partición P del intervalo $[0, 1]$ se tenga que:

$$L(f, P) = 0?$$

5. ¿Cierto o falso?

- Considera $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[0, 1]$. Si para cualquier partición P del intervalo $[0, 1]$ se tiene que $L(f, P) = 3$ entonces f sí es integrable en $[0, 1]$ y $\int_0^1 f = 3$.
- Considera $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable en $[0, 2]$ entonces $\int_0^1 f \leq \int_0^2 f$.
- Considera $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable en $[0, 2]$ y $f(x) \geq 0$ para cualquier $x \in [0, 1]$ entonces $\int_0^1 f \leq \int_0^2 f$.
- Considera $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[0, 1]$. Si para cualquier partición P del intervalo $[0, 1]$ se tiene que $L(f, P) \neq U(f, P)$ entonces f no es integrable en $[0, 1]$.
- Considera $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[0, 1]$. Si f no es integrable en $[0, 1]$ entonces $g(x) = |f(x)|$ no es integrable en $[0, 1]$.
- Considera $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados y diferentes del vacío. Si $\sup A = \inf B$ entonces para toda $\epsilon > 0$ existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $|a - b| \leq \epsilon$.
- Considera $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado y distinto del vacío. Si $\alpha = \sup A$ y $\alpha \notin A$ entonces existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A (i.e. $a_i \in A$ para toda $i \in \mathbb{N}$) tal que para cualquier $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_i < a_{i+1}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.
- Si $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones acotadas en el $[0, 1]$ y $g \circ f$ es integrable en el $[0, 1]$

entonces al menos una de las dos, f ó g , es integrable en el $[0, 1]$.

(i)

$$\int_1^3 \frac{1}{t} dt \geq \frac{19}{10}$$

(j) Considera $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, acotadas e integrables en $[0, 1]$. Si $\int_0^1 f \leq \int_0^1 g$ entonces para todo $x \in [0, 1]$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$.

6. Considera $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada en $[0, 1]$. Si para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $f(x) \geq 0$, para algún $a < c < b$, f es continua en c y $f(c) > 0$ demuestra que

$$\int_a^b f > 0.$$

7. Considera $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable en $[0, 1]$. Si para todo $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ tenemos que $f(x) = 0$ demuestra que

$$\int_0^1 f = 0.$$

8. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f es acotada e integrable en $[0, 1]$. Si para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $f(x) \geq 0$ y $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ demuestra que

$$\int_\alpha^\beta f \leq \int_a^b f$$

9. Demuestra:

- Considera $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A tiene contenido cero entonces A tiene medida cero.
- Considera $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Si A y B tienen contenido cero entonces $A \cup B$ tiene contenido cero.
- Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tienen medida cero entonces $A \cup B$ tiene medida cero.

10. Da ejemplos de funciones $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f sea integrable, g no lo sea pero

$$\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\}$$

tenga medida cero.

11. Demuestra que:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1} dt > 0$$

para todo $x > 0$.

12. Obtén sin cálculos:

(a)

$$\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

(b)

$$\int_{-1}^1 (x^5 + 3) \sqrt{1-x^2} dx$$

13. Halla las áreas de las regiones limitadas por:

- Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$.
- Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$ y las verticales por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.
- Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$.
- Las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$.
- Las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$ y el eje vertical.
- La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje horizontal y la vertical que pasa por $(2, 0)$.

14. Considera funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si ambas son integrables en $[a, b]$ entonces demuestra que:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$,
- fg es integrable en $[a, b]$ y
- $\frac{f}{g}$ es integrable en $[a, b]$ siempre y cuando $g(x) \neq 0$ para toda $x \in [a, b]$.

15. Prueba que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2 + n^2} dx = 0.$$

16. Prueba que existen valores ξ_1 y ξ_2 en $[0, 1]$ tales que:

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^2 + 1} dx = \frac{2}{\pi(\xi_1^2 + 1)} = \frac{\pi}{4} \sin \pi \xi_2.$$

17. Prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$